MATHÉMATIQUES

TRONC COMMUN SCIENCES

L'ORDRE DANS R

Kiffelesmaths.com

L'ORDRE DANS R

1- Comparaison :

a-

Soient a et b deux réels :

- si $a-b \geq 0$ alors $a \geq b$ et si $a \geq b$ alors $a-b \geq 0$.
- si $a-b \leq 0$ alors $a \leq b$ et si $a \leq b$ alors $a-b \leq 0$.

Exemples :

On a $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6-5}{10}=\frac{1}{10}>0$ alors $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$.

et $\frac{7}{3}-\frac{5}{2}=\frac{14-15}{6}=\frac{-1}{6}<0$ alors $\frac{7}{3}<\frac{5}{2}$.

Application : comparer $\frac{12}{7}$ et $\frac{7}{4}$;; $\frac{-6}{7}$ et $\frac{-3}{4}$;; x^2+y^2 et $2xy$.

2- L'ordre :

Propriétés :

Soient a, b, c et d des réels :

- si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq$c .

Exemple : On a $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ et$\sqrt{8} < 3$ alors $\sqrt{7}$ <3 .

L'ordre et l'addition :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.

Exemple : On a $1 < 2$ alors $1 + \sqrt{3} < 2 + \sqrt{3}$

- si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

Exemple : On a $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ et $\sqrt{3} < 2$ alors $\sqrt{7} + \sqrt{3} < \sqrt{8}$+2 .

L'ordre et la multiplication :

- si $b \leq c$ et $a > 0$ alors a$b \leq ac$.
- si $b \leq c$ et $a < 0$ alors a$b \geq ac$.

Exemple : On a $\sqrt{7} \leq \sqrt{8}$ alors $2\sqrt{7} \leq 2\sqrt{8}$ et $-3\sqrt{7} \geq -3\sqrt{8}$

- si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$.

Exemple :

On a $\sqrt{7} \leq \sqrt{8}$ et $\sqrt{3} \leq 2$ alors $\sqrt{21} \leq 2\sqrt{8}$.

L'ordre et le carré:

- si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$.

Exemple : On a $0{,}2 < 0{,}5$ alors $(0{,}2)^2 < (0{,}5)^2$

- si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Exemple : On a $2 < 3$ alors $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

L'ordre et l'inverse:

- si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
- si $\mathrm{a} \leq \mathrm{b} < 0$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Exemples : On a $2 < 3$ alors $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

et $-7 < -5$ alors $\frac{1}{-7} > \frac{1}{-5}$

3- Encadrement :

Propriétés :

Soient a, b, c et d des réels :

- si $a \leq x \leq b$

  et $c \leq y \leq d$

alors $a + c \leq x + y \leq b + d$.

Exemple :

$$1 \leq x \leq 2$$
$$-3 \leq y \leq 1$$

alors $1 + (-3) \leq x + y \leq 2 + 1$

donc $-2 \leq x + y \leq 3$

Remarque :

Pour encadrer x-y on doit encadrer –y puis x+(-y).

Exemple : $0 \leq x \leq 1$ et $2 \leq y \leq 3$

On a $2 \leq y \leq 3$ alors $-3 \leq -y \leq -2$

alors $0 + (-3) \leq x + (-y) \leq 1 + (-2\ )$

donc $-3 \leq x - y \leq -1$

b- Soient a, b, c et d des réels positifs:

- si $a \leq x \leq b$

et $c \leq y \leq d$

alors $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$.

Exemple :

$$1 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq \frac{1}{2}$$
$$1 \times 0 \leq x \times y \leq 2 \times \frac{1}{2}$$

donc $0 \leq xy \leq 1$

Remarque : Pour encadrer $\frac{x}{y}$ on doit encadrer $\frac{1}{y}$ puis $x \times \frac{1}{y}$

Exemple : $6 \leq x \leq 7$ et $2 \leq y \leq 3$

On $2 \leq y \leq 3$ alors $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

alors $6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{2}$

donc $2 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{2}$

4- les intervalles :

Soient a et b deux réels :

Intervalle	Encadrement
$x \in [a, b]$	$a \leq x \leq b$
$x \in [a, b[$	$a \leq x < b$
$x \in]a, b]$	$a < x \leq b$
$x \in]a, b[$	$a < x < b$

Intervalle	Encadrement
$x \in [a, +\infty[$	$x \geq a$
$x \in]a, +\infty[$	$x > a$
$x \in]-\infty, b]$	$x \leq b$
$x \in]-\infty, b[$	$x < b$

Exemples :

$x \in [1,2]$ signifie que $1 \leq x \leq 2$.

$x \in]1,2]$ signifie que $1 < x \leq 2$.

$x \in]-\infty, 5]$ signifie que $x \leq 5$.

Note 1

$\boldsymbol{R} =]-\infty, +\infty[$

Note 2

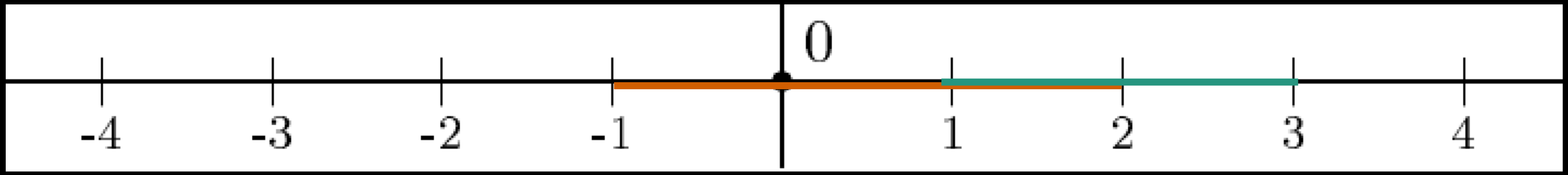
L'ensemble vide est noté ∅

L'intersection de deux intervalles I et J c'est une intervalle notée $I \cap J$, qui contient les éléments communs des deux intervalles.

L'union de deux intervalles I et J c'est une intervalle notée $I \cup J$, qui contient les éléments des deux intervalles.

Exemple :

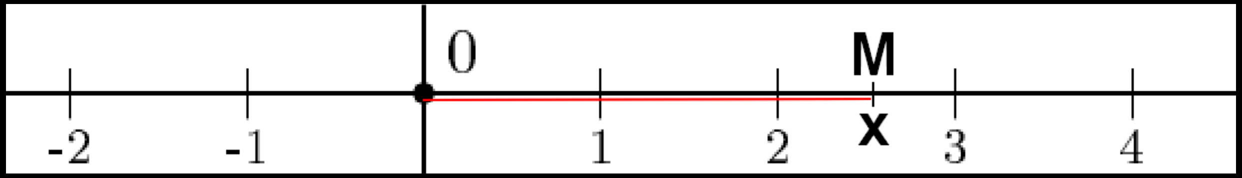
Soient les deux intervalles $\mathrm{I} = [-1,2]$ et $\mathrm{J} = [1,3]$



On a $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = [1,2]$ et $\mathrm{I} \cup J = [-1,3]$

5- La valeur absolue :

Soit x un nombre réel, la valeur absolue de x est la distance entre le zéro et le point d'abscisse x sur la droite des nombres réels.



$$|x| = OM$$

Conclusion :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \qquad \text{et } |x| = -x \text{ si } x \leq 0$$

Exemples : $|-3| = 3$; $|3| = 3$

Propriétés :

- $|x| = |-x| \quad ; |xy| = |x| \times |y| \quad ; \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Attention : $|x + y| \leq |x| + |y|$

- $|x| = |y|$ signifie que $x = y \; ou \; x = -y$
- $|x| \leq a$ signifie que $-a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a$ signifie que $x \leq -a$ ou $x \geq a$

6- l'encadrement et l'approximation :

A- Centre et rayon d'un intervalle :

Soient les intervalles $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$ et $]a;b[$:

- La valeur $\mathrm{c} = \frac{a+b}{2}$ est le centre de ces intervalles.
- $d = b - a$ est la capacité.
- $\mathrm{r} = \frac{b-a}{2}$ est le rayon.

Exemples :

- Le centre de l'intervalle $[-2;1[$ est : $\mathrm{c} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$
- La capacité de l'intervalle $[-2;-\frac{1}{2}[$ est : $d = -\frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2}$
- Le rayon de l'intervalle $[-2;0[$ est : $\mathrm{r} = \frac{0-(-2)}{2} = 1$

B- L'approximation :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$

et les encadrement $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$; $\boldsymbol{a \leq x < b}$; $\boldsymbol{a < x \leq b}$ et $\boldsymbol{a < x < b}$

- $\mathbf{b - a}$ s'appelle la capacité de l'encadrement de x,
- Le nombre $\boldsymbol{a}$ s'appelle une approximation du nombre $\boldsymbol{x}$ par défaut,
- Le nombre $\boldsymbol{b}$ s'appelle une approximation du nombre $\boldsymbol{x}$ par excès.

Exemple :

On a $2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$ est un encadrement de $\sqrt{7}$,

- La capacité de cet encadrement est $2{,}646 - 2{,}645 = 0{,}001 = 10^{-3}$
- L'approximation de $\sqrt{7}$ par défaut est : $2{,}645$
- L'approximation de $\sqrt{7}$ par excès est : $2{,}646$

les approximations décimales

Définition:

Soient x un nombre réel et n un entier naturel ;

On admet qu'il existe un et un seul entier relatif p tel que :

$$p \times 10^{-n} \leq \ x \ < (p+1) \times 10^{-n}$$

Le nombre $p \times 10^{-n}$ est une valeur approchée par défaut à x à 10^{-n} (on dit aussi d'ordre n)

- le nombre < $(p+1) \times 10^{-n}$ est une valeur approchée par excès à x à 10^{-n}(on dit aussi d'ordre n)

Exemple:

On a $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$ c.à.d $2236 \times 10^{-3} < \sqrt{5} < 2237 \times 10^{-3}$

Alors $2{,}236$ est une valeur approchée a $\sqrt{5}$ par défaut à 10^{-3}

et $2{,}237$ est une valeur approchée a $\sqrt{5}$ par excès à 10^{-3}

7- La valeur approchée:

Définition :

Soient x un nombre réel et r un réel tel que $r > 0$.

Tout nombre p qui vérifie $|\boldsymbol{x} - p| \leq \boldsymbol{r}$ s'appelle une valeur approchée du nombre $\boldsymbol{x}$ à $\boldsymbol{r}$.

on dit aussi p est une approximation du nombre $\boldsymbol{x}$ de précision $\boldsymbol{r}$.

Remarque: Si x un élément de l'intervalle $[a, b]$

alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x de précision $r = \frac{b-a}{2}$

Exemple :

on a $3,14 < \pi < 3,15$ alors $\frac{3,14+3,15}{2} = 3,145$ est une valeur approchée de π de précision 5×10^{-2},

$$r = \frac{3,15 - 3,14}{2} = \frac{0,01}{2} = 0,005 = 5 \times 10^{-2}$$