

Limite d'une fonction numérique

1- Limites de fonctions : définitions et premières propriétés.

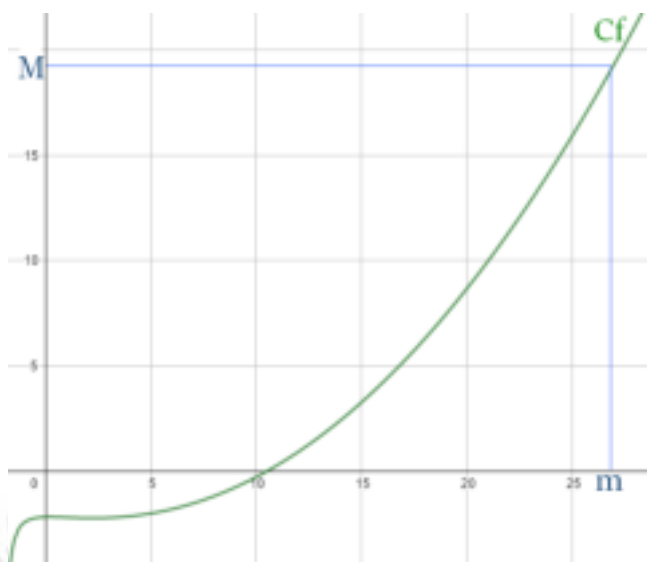
a- Limite à l'infini

Définition (limite infinie à l'infini) :

Une Soit f une fonction définie sur une partie D_f de \mathbb{R} , telle qu'il existe un réel a pour lequel $[a; +\infty[$ est inclus dans D_f . (On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$).

On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout réel M , il existe un réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$, si $x > m$, alors $f(x) > M$.

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



On définit de façon similaire les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Propriétés :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Exemples :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$.

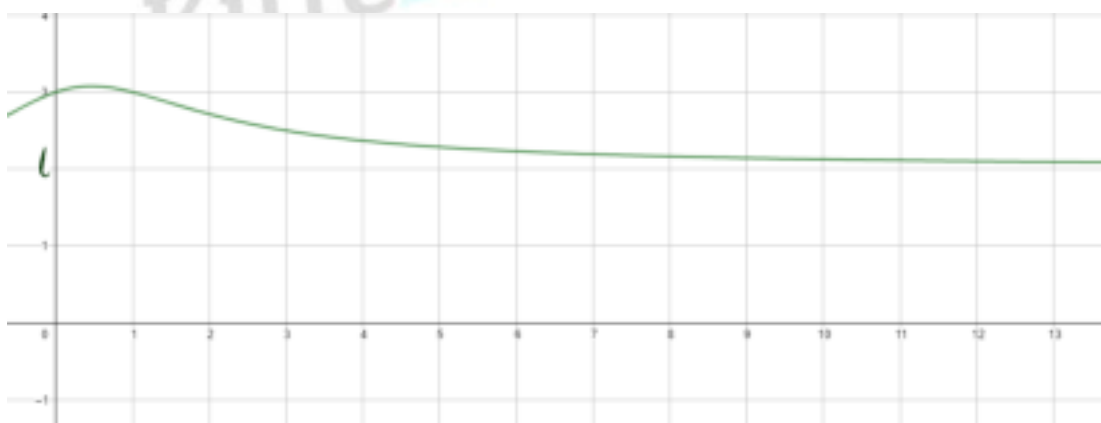
Définition (limite finie à l'infini) :

Une Soit f une fonction définie sur une partie D_f de \mathbb{R} , telle qu'il existe un réel a pour lequel $[a ; +\infty[$ est inclus dans D_f .

On dit que f a pour limite, un réel l quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$, si $x > m$,

alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



On définit de façon similaire les limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Propriétés :

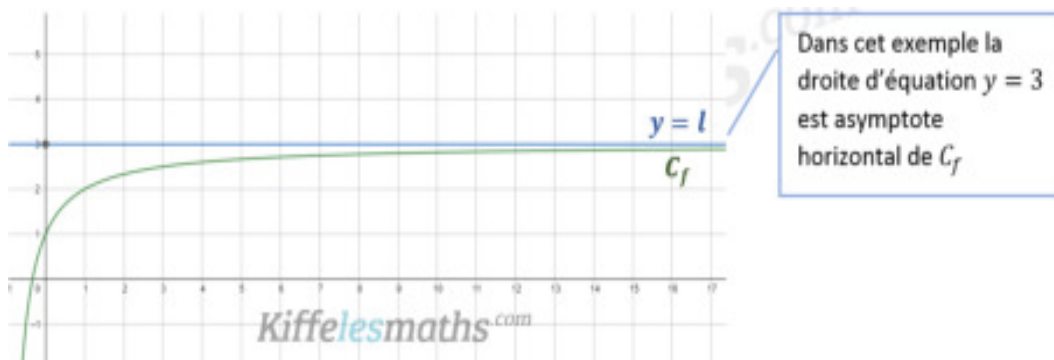
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Définition :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction f



Applications et méthodes sur le site  Kiffelesmaths.com

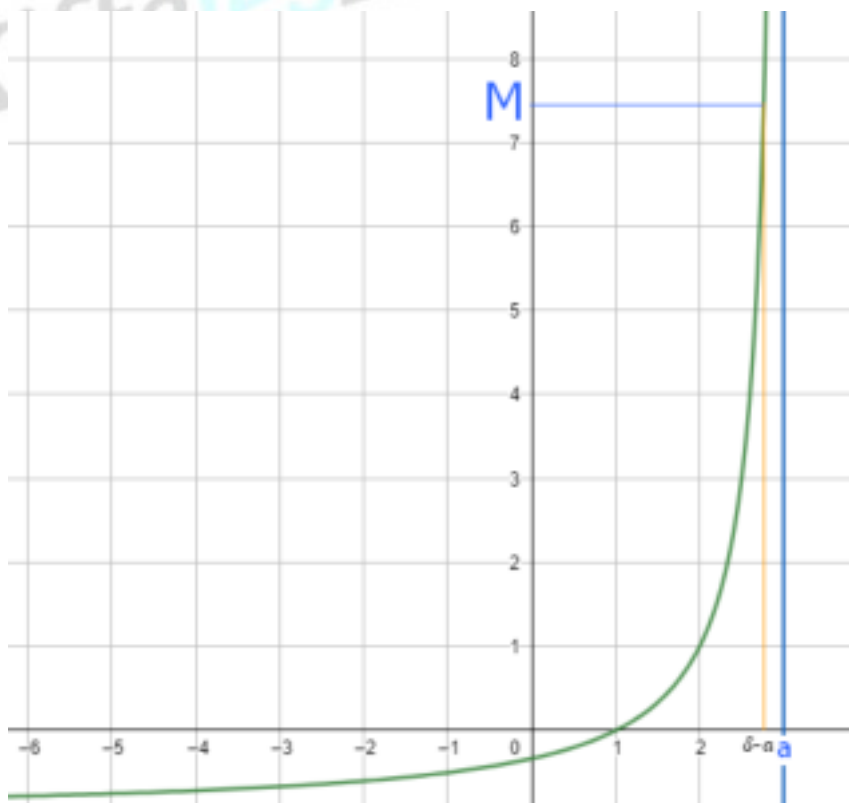
b- Limite en un réel

Définition (Limite infinie en a) :

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de \mathbb{R} , et a un élément de D_f .

On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a signifie que $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$, tel que, pour tout $x \in D_f$, si $|x - a| < \delta$, alors $f(x) > M$.

On note alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.



Propriétés :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 - si n est pair, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
 - si n est impair, $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty, & (\text{limite à droite en } 0) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty, & (\text{limite à gauche en } 0) \end{cases}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

Notations :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \text{ se note aussi } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \text{ se note } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Définition (Limite finie en a):

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de \mathbb{R} , et a un élément de D_f .

On dit que f a pour limite un réel l quand x tend vers a signifie que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que, pour tout $x \in D_f$, si $|x - a| < \delta$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

On note alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Propriétés (admisses) :

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :

- Si $a \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- Si f est un polynôme, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Si f et g sont des polynômes, et $g(a) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$.
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$.
- $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.
- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$.

Applications et méthodes sur le site 

2- Opérations sur les limites

a- Propriétés

On considère deux fonctions f et g , et deux réels l et l' .

Propriétés (admise) : Limite d'une somme

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

« F.I. » signifie forme indéterminée.

On ne peut pas déterminer la limite par simple lecture du tableau.

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x + \frac{1}{x} = 3 + 1 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 - 7 = -\infty, \dots$$

Propriétés (admise) : Limite d'un produit

Limite de f	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Limite de $f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

$\pm\infty$ signifie $+\infty$ ou $-\infty$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2(1+x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5(x-1) = +\infty, \dots$$

Propriétés (admise) : Limite d'un quotient.

Limite de f	l	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
Limite de g	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0
Limite de $\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9999}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}}{x-2} = \frac{2}{2} = 1, \dots$$

Applications et méthodes sur le site [Kiffelesmaths.com](https://www.kiffelesmaths.com)

b- Formes indéterminées

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Exemple :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2$ est une forme indéterminée " $(+\infty) + (-\infty)$ ".

Pour lever cette F.I. on factorise par le monôme de plus haut degré, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right) \text{ et puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1 - 0 = 1$$

Finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 = +\infty$.

Remarque :

Une fonction écrite sous la forme d'un quotient de polynômes est une fonction rationnelle.

Exemple 1 :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-3}$ est une forme indéterminée " $(+\infty) / (+\infty)$ ".

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}\right)}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1 - 0 = 1$ et par quotient et produit de limites on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty$

Exemple 2 :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{1-x^2}$ est une forme indéterminée " $(+\infty) / (-\infty)$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{(1+\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x^2}-1)} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1$$

et par quotient et produit de limites on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{1-x^2} = 0 \times \frac{1}{-1} = 0$

Exemple 3 :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{1-x^2}$ est une forme indéterminée " $(0) / (0)$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{1+x} = \frac{-2}{2} = -1$$

c- Limites des fonctions irrationnelles

Propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; +\infty[$ telle que $f(x) \geq 0$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{0} = 0$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$ Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ Exemple : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{f(x)} = +\infty$ Exemple : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

d- Limites des fonctions trigonométriques

Propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

et si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \frac{\sin 3x}{x} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \times x = \frac{1}{2} \times 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \times \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

Applications et méthodes sur le site  [Kiffesmaths.com](https://www.kiffesmaths.com)

3- Limites et comparaison

a- Théorème de comparaison

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I = [a ; +\infty[$

- Si $f(x) \geq g(x)$ sur I et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur I et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Exemple :

On a $x^2 + \sin x \geq x^2 - 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sin x = +\infty$

Remarque :

La même propriété est valable pour une limite en $-\infty$.

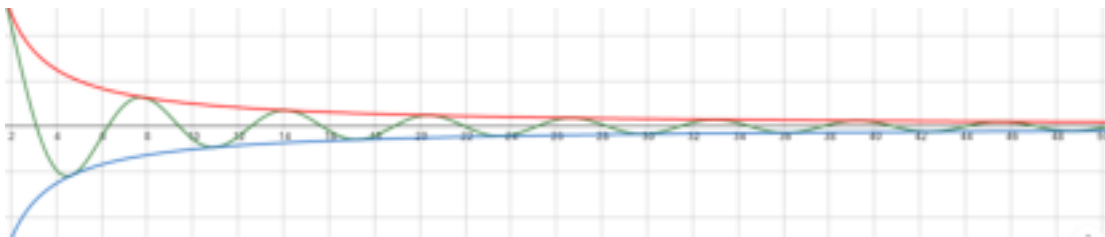
Applications et méthodes sur le site [Kiffesmaths.com](#)

b- Théorème des gendarmes

Théorème :

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I = [a ; +\infty[$.

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur I et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



Exemple :

On a $\frac{-1}{x^2+1} \leq \frac{\sin x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0$

Remarque :

Ce théorème est souvent appelé « théorème des gendarmes ». Il est également valable en $-\infty$ et en un réel a .

Applications et méthodes sur le site [Kiffesmaths.com](#)

(Voir aussi limite d'une fonction composée sur le site [Kiffesmaths.com](#))

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site [Kiffesmaths.com](#)