1- Limites de fonctions : définitions et premières propriétés.

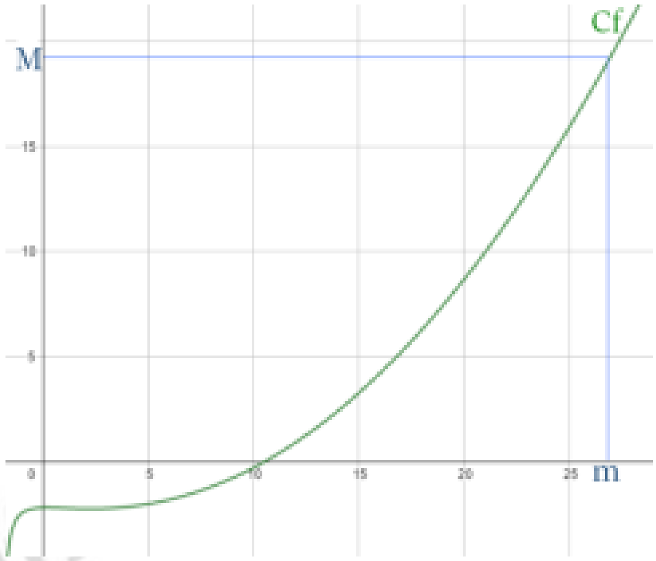
a- Limite à l'infini

Définition (limite infinie à l'infini) :

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$, tel qu'il existe un réel a pour lequel $[a\,;+\infty[$ est inclus dans D_f. (On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$).

On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour tout réel M, il existe un réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$, si $x > m$, alors $f(x) > M$.

On écrit alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



On définit de façon similaire les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Propriétés :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est paire} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impaire} \end{cases}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.

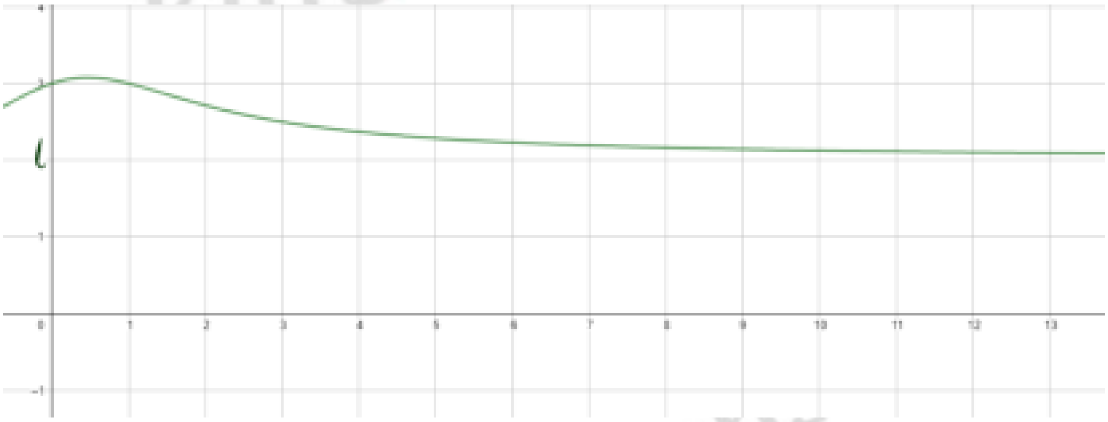
Définition (limite finie à l'infini) :

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$, tel qu'il existe un réel a pour lequel $[a\,;+\infty[$ est inclus dans D_f.

On dit que f a pour limite, un réel l quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$, si $x > m$,

alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

On écrit alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.



On définit de façon similaire les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Propriétés :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

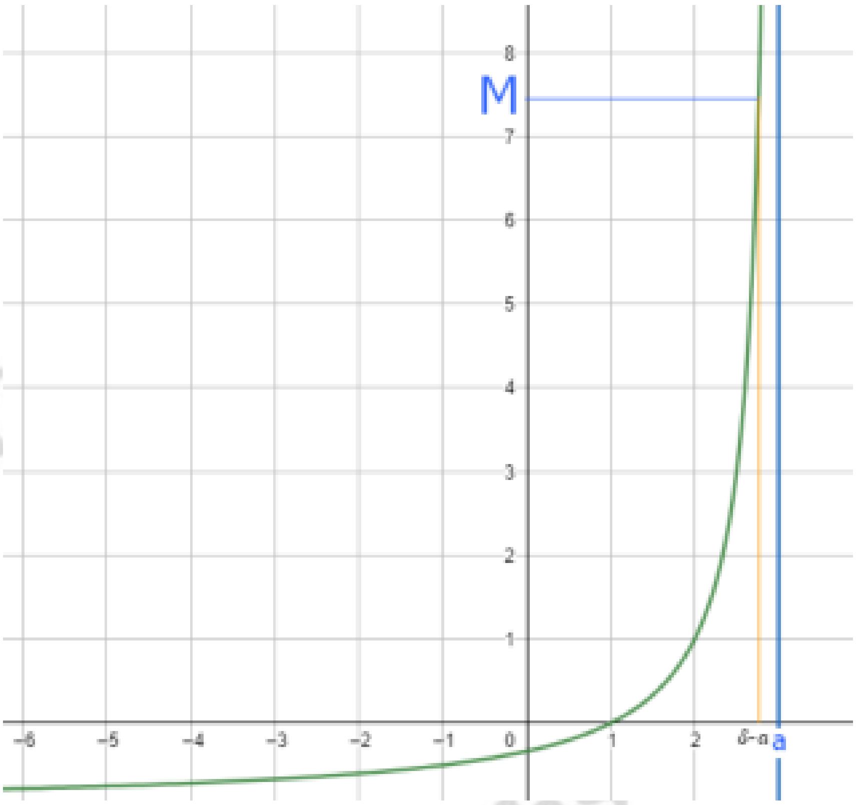
b- Limite en un réel

Définition (Limite infinie en a) :

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$, et a un élément de D_f.

On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a signifie que $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists\delta > 0$, tel que, pour tout $x \in D_f$, si $|x - a| < \delta$, alors $f(x) > M$.

On note alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.



Propriétés :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
  - si n est impair, $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ , } (limite \text{ à } droite \text{ } en \text{ } 0) \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty \text{ , } (limite \text{ à } gauche \text{ } en \text{ } 0) \end{cases}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Exemples :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$.

Notations :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ Se note aussi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ se note $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Définition (Limite finie en a):

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$, et a un élément de D_f.

On dit que f a pour limite un réel l quand x tend vers a signifie que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que, pour tout $x \in D_f$, si $|x - a| < \delta$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

On note alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Propriétés (admises) :

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :

- Si $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- Si f est un polynôme, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Si f et g sont des polynômes, et $g(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$.
- $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$.
- $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$.
- $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

2- Opérations sur les limites

a- Propriétés

On considère deux fonctions f et g, et deux réels l et l'.

Propriétés (admise) : Limite d'une somme

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

« F.I. » signifie forme indéterminée.
On ne peut pas déterminer la limite par une simple lecture du tableau.

Exemples :

$\lim\limits_{x \to 1} 3x + \frac{1}{x} = 3 + 1 = 4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 - 7 = -\infty$, ...

Propriétés (admise) : Limite d'un produit

Limite de f	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Limite de $f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

$\pm\infty$ signifie $+\infty$ ou $-\infty$

Exemples :

$\lim\limits_{x \to 1} x^2(1+x) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3(1+\frac{1}{x}) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5(x-1) = +\infty$, ...

Propriétés (admise) : Limite d'un quotient.

Limite de f	l	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0

Limite de g	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0
Limite de $\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**	**F.I.**

Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+2} = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{9999}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}}{x-2} = \frac{2}{2} = 1,\ \ldots$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths

b- Formes indéterminées

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Exemple :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2$ est une forme indéterminée "$(+\infty) + (-\infty)$".

Pour lever cette F.I. on factorise par le monôme de plus haut degré, alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = 1 - 0 = 1$

Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 = +\infty$.

Remarque :

Une fonction écrite sous la forme d'un quotient de polynômes est une fonction rationnelle.

Exemple 1 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-3}$ est une forme indéterminée "$(+\infty)$ / $(+\infty)$".

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x \times \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}\right)}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{x^2} = 1 - 0 = 1$ et par quotient et produit de limites on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty$

Exemple 2 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{1-x^2}$ est une forme indéterminée "$(+\infty)$ / $(-\infty)$".

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1$
et par quotient et produit de limites on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{1-x^2} = 0 \times \frac{1}{-1} = 0$

Exemple 3 :

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2}{1-x^2}$ est une forme indéterminée "(0) / (0)".

$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{-2(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{-2}{1+x} = \frac{-2}{2} = -1$

c- Limites des fonctions irrationnelles

Propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a\,;+\infty[$ telle que $f(x) \geq 0$

- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ Exemple : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{0} = 0$
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = +\infty$ Exemple : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$
- Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ alors $\lim_{x\to a^+}\sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ Exemple : $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = 0.$
- Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a^+}\sqrt{f(x)} = +\infty$ Exemple : $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

d- Limites des fonctions trigonométriques

Propriétés :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = a$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a}\sin x = \sin a$ et $\lim_{x\to a}\cos x = \cos a$

et si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ avec\ k \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{x\to a}\tan x = \tan a$

Exemples :

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = 3$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{\sin 3x}{x} = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times x = \frac{1}{2}\times 0 = 0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 4\times\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} = 4\times\frac{1}{2} = 2$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

3- Limites et comparaison

a- Théorème de comparaison

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I = [a\,;+\infty[$

- Si $f(x) \geq g(x)$ sur I et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur I et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Exemple :

On a $x^2 + \sin x \geq x^2 - 1$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 + \sin x = +\infty$

Remarque :

La même propriété est valable pour une limite en $-\infty$.

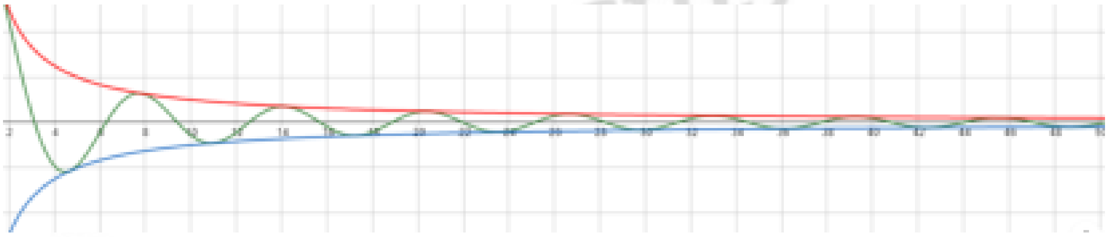
Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Théorème des gendarmes

Théorème :

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I = [a\,;+\infty[$.

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur I et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.



Exemple :

On a $\frac{-1}{x^2+1} \leq \frac{\sin x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0$

Remarque :

Ce théorème est souvent appelé « théorème des gendarmes ». Il est également valable en $-\infty$ et en un réel a.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

(Voir aussi limite d'une fonction composée sur le site Kiffelesmaths.com)

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com