1- Dérivabilité en un point.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

Soient $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

a- Nombre dérivé

Définition :

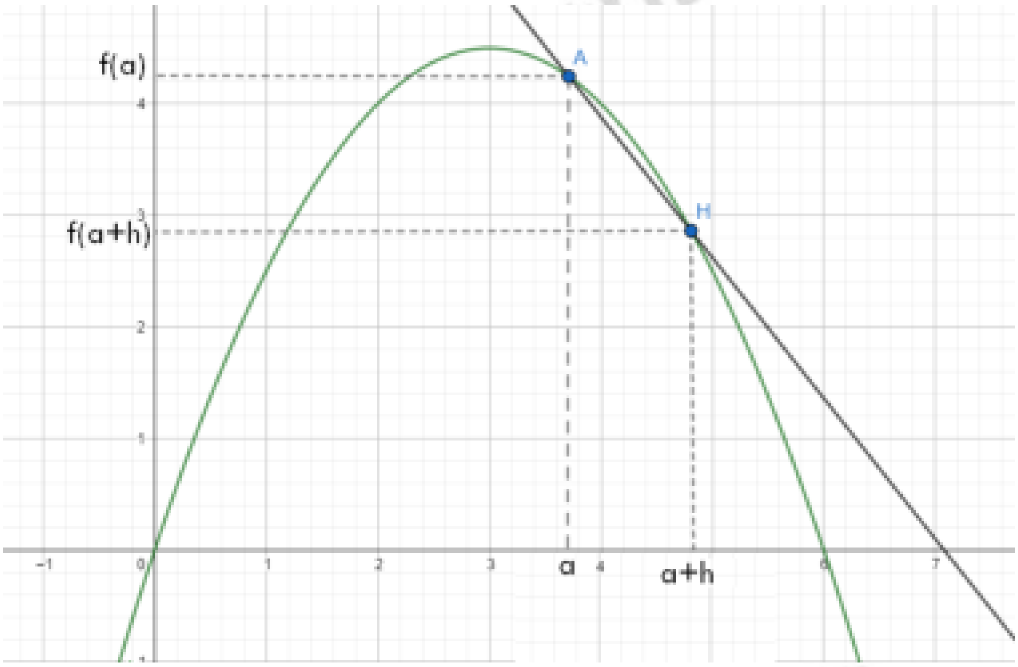
On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de f en a, se note $f'(a)$.

On a aussi $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si on pose $h = x-a$.

Le nombre $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé taux de variation entre a et $a+h$.

Si on pose $A\big(a, f(a)\big)$ et $H\big(a+h, f(a+h)\big)$ alors $\tau(h)$ est le coefficient directeur de la droite (AH).



Le taux de variation $\tau(h)$ s'appelle également le taux d'accroissement entre a et $a+h$.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, et soit le point $A\big(1\,;f(1)\big) \in C_f$

On a $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-1}{h+1} = -1$

Donc f est dérivable en 1 et on a $f'(1) = -1$.

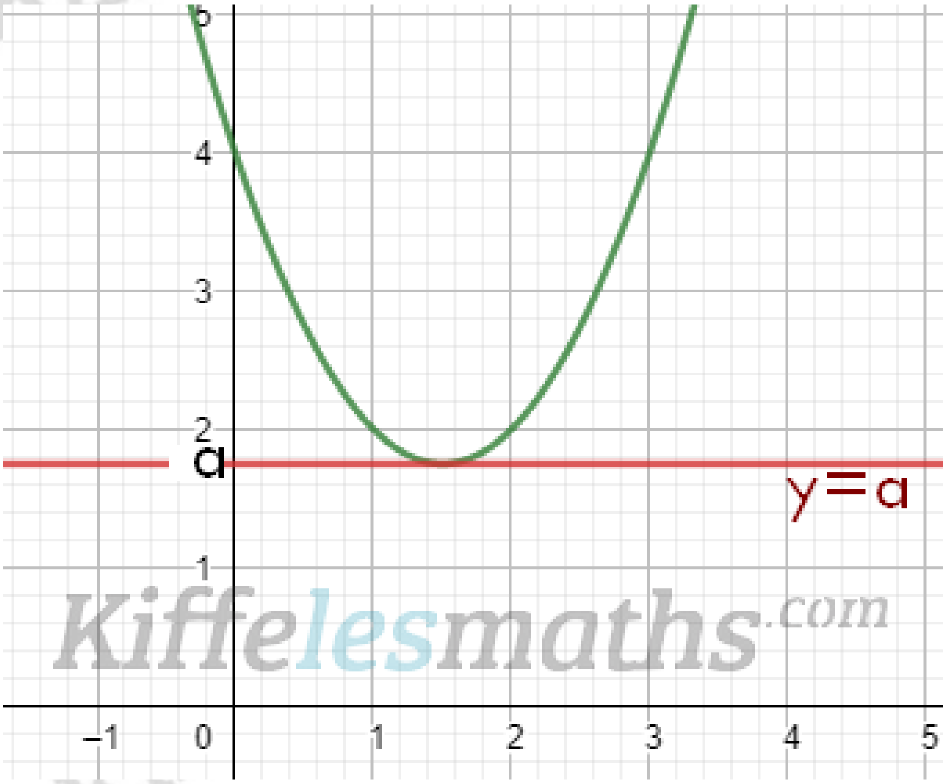
b- Tangente à une courbe (Interprétation géométrique)

Définition :

Lorsque f est dérivable en a on appelle tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite (T) passante par le point $A(a; f(a))$ dont le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$.

Remarque :

Lorsque $f'(a) = 0$ alors la tangente horizontale à C_f au point d'abscisse $y = a$. (elle est parallèle à l'axe des abscisses)



Exercice d'application :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$

Montrer que Cf admet une tangente en $A(0; f(0))$, en déterminant son coefficient directeur.

Rédaction :

On a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2-2h+1-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(h-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h - 2 = -2$

Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et Cf admet une tangente en $A(0; f(0))$ de coefficient directeur $p = -2$.

Propriétés (équation de la tangente) :

Soit f une fonction dérivable en x_0

L'équation réduite de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

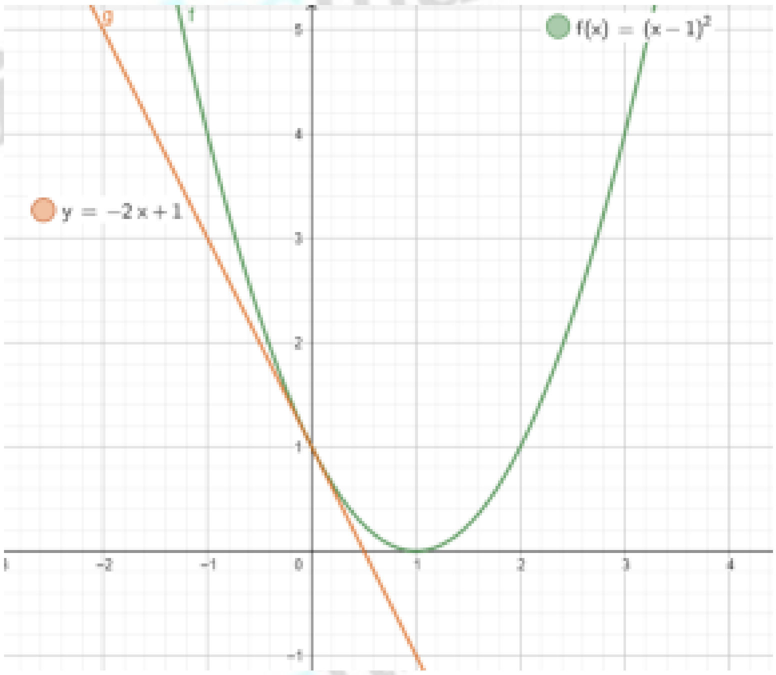
Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$,

D'après l'exercice d'application de la partie (1-b) on a $f'(0) = -2$

L'équation de la tangente (T) de Cf en $A(0; f(0))$ est : $y = f'(x_0)(x-0) + f(x_0)$.

Donc $(T): y = -2x + 1$.



c- Approximation affine d'une fonction f en un point :

Définition :

Soit f une fonction dérivable en a avec $f'(a) = m$ et $f(a) = p$.

La fonction $u : x \longmapsto m(x-a) + p$ est appelée la fonction affine tangente à la fonction f en a.

Si on pose $h = x - a$ alors la fonction affine tangente à la fonction f en a est $v \longmapsto mh + p$.

Le nombre $f'(a)h + f(a)$ est une approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de 0. (Quand h tend vers 0) et on écrit $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) = mh + p$

Exemple :

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2$.

1- Déterminer la fonction affine tangente à la fonction f en 1.
2- Déduire une valeur approchée de $(0.999)^2$.

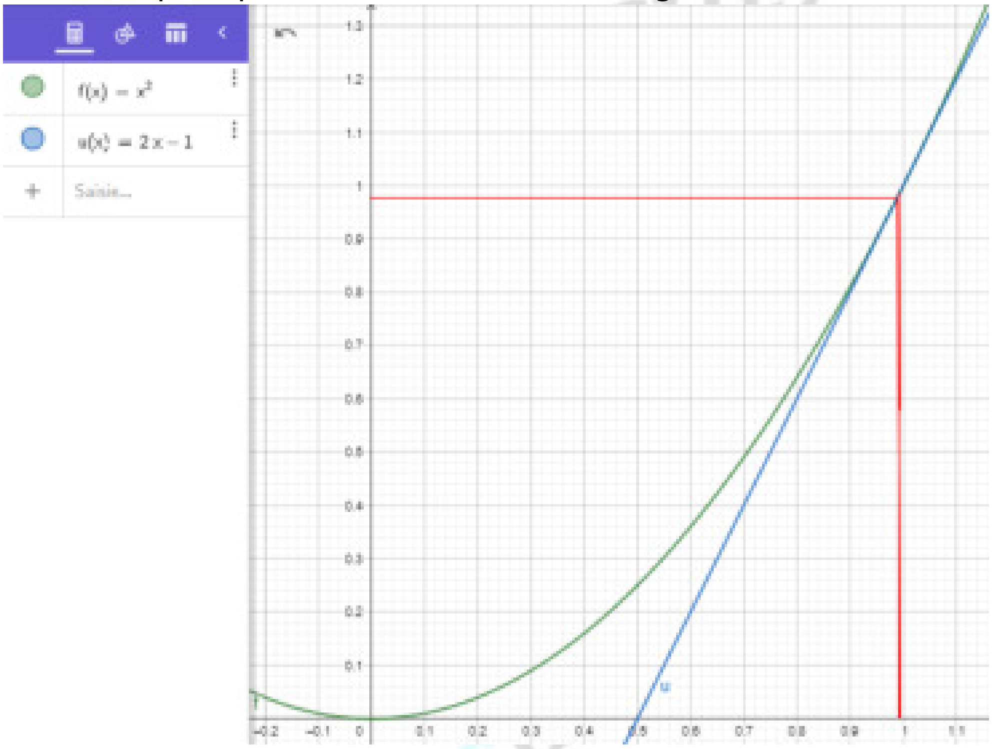
Rédaction :

1- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = 2$ donc est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$, or $f(1) = 1$ alors la fonction affine tangente à la fonction f en 1 et $u(x) = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$.

2- On a $0.999 \approx 1$ alors $f(0.999) \approx u(0.999)$
Alors $f(0.999) \approx 2 \times 0.999 - 1$ donc $f(0.999) \approx 0.998$

Remarque :

Sur la figure ci-dessous on remarque que les courbes des deux fonctions f et u sont presque confondues au voisinage de 1.



Voir l'explication de cours et les exercices sur le site Kiffelesmaths.com

2- Dérivabilité à droite et à gauche

a- Définitions

Définition 1 :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;a+\varepsilon[$ (à droite de a)

On dit que f est dérivable à droite de a s'il existe un réel l_d tel que :
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l_d$ (ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_d$).
Le nombre l_d est appelé le nombre dérivé de f à droite de a, se note $f'_d(a)$.

Définition 2 :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a-\varepsilon\,;a[$ (à gauche de a)

On dit que f est dérivable à gauche a s'il existe un réel l_g tel que :
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l_g$ (ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_g$).
Le nombre l_g est appelé le nombre dérivé de f à gauche de a, se note $f'_g(a)$.

Propriété :

On dit que f est dérivable en a si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

b- Equation de demi-tangente (Interprétation géométrique)

Propriétés :

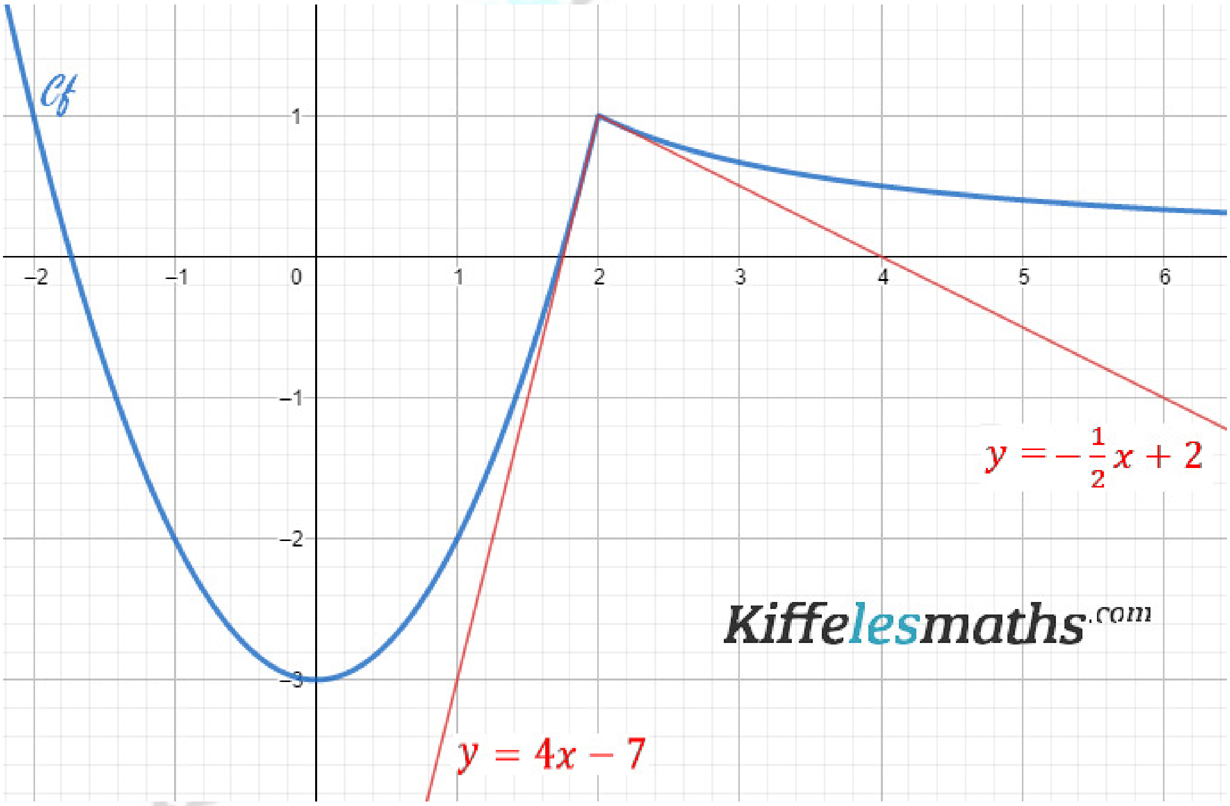
- Si f est dérivable à droite de a alors la courbe de f admet une demi-tangente à droite de a d'équation $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$.
- Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe de f admet une demi-tangente à gauche de a d'équation $y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$.
- Si $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$ (ou $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$) alors la courbe de f admet une demi-tangente verticale à droite de a (ou à gauche de a).

Exemple :

Soit la fonction $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3\,; x < 2 \\ f(x) = \frac{2}{x}\,; x \geq 2 \end{cases}$ alors on a $f(2) = 1$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-3-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} x+2 = 4$ alors f est dérivable à droite de 2 et $f'_d(2) = 4$, donc la courbe de f admet une demi-tangente à droite de 2, d'équation : $y = 4(x-2) + 1 = 4x - 7$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\frac{2}{x}-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}$ alors f est dérivable à gauche de 2 et $f'_g(2) = -\frac{1}{2}$, donc la courbe de f admet une demi-tangente à gauche de 2, d'équation : $y = -\frac{1}{2}(x-2) + 1 = -\frac{1}{2}x + 2$
- f n'est pas dérivable en 2 car $f'_d(2) \neq f'_g(2)$.

Courbe de f :



Voir l'explication de cours et les exercices sur le site Kiffelesmaths.com

3- Fonctions dérivées

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

a- Fonction dérivable

Définition :

On dit que f est dérivable sur l'intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout réel a de I.

On appelle fonction dérivée de f la fonction qui, à tout réel a de I associe le réel $f'(a)$ On la note f'.

Exemple :

Soit la fonction $g: x \longmapsto x^2$, pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

Donc $g'(x) = (x^2)' = 2x$.

b- Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle D_f et f' sa fonction dérivée sur D'_f, et soient k et p deux réels et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

La fonction f	D_f	La fonction f'	D'_f	Exemples
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$(7)' = 0$
$f(x) = kx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = k$	$\mathbb{R}$	$(-2x+3)' = -2$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$(x^5)' = 5x^4$, $(x^2)' = 2x$
$f(x) = \frac{k}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-k}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\left(\frac{3}{x}\right)' = \frac{-3}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$(3\sqrt{x})' = \frac{3}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos ax$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -a\sin ax$	$\mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$f(x) = \sin ax$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a\cos ax$	$\mathbb{R}$	$(\sin x)' = \cos x$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

NOTATION : Si $y = f(x)$ alors $f'(x)$ se note $\frac{dy}{dx}$.

Voir l'explication de cours et les exercices sur le site Kiffelesmaths.com

c- Dérivées successives

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est dérivable sur I alors $(f')'$ s'appelle la dérivée seconde de f et on note $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$.
- Si f'' est dérivable sur I alors $(f'')'$ s'appelle la dérivée troisième (ou dérivée d'ordre 3) de f notée $f^{(3)}$.
- En général, la fonction dérivée nième (d'ordre n) est notée $f^{(n)}$.

Exemple :

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3$

On a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^3+3xh^2+3hx^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h^2 + 3xh + 3x^2 = 3x^2$

Alors $f'(x) = x^2$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3h^2+6xh}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3h + 6x = 6x$

Alors $f''(x) = 6x$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{6(x+h)-6x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{6h}{h} = 6$

Alors $f^{(3)}(x) = 6$

d- Opérations sur les fonctions dérivées

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et k et p deux réels, On a :

Opération	**Fonction**	**Dérivée**	**Exemple**
somme	$f+g$	$(f+g)' = f' + g'$	$(x^2+3x)' = 2x+3$
Produit par un réel.	kf	$(kf)' = k \times f'$	$(2x^4)' = 2(x^4)' = 8x^3$
Produit	$f \times g$	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	$\left((x+1)x\right)' = 2x+1$
Inverse	$\frac{1}{f}$ avec $f(x) \neq 0$ sur I.	$f' = \frac{-f'}{f^2}$	$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
Quotient	$\frac{f}{g}$ avec $g(x) \neq 0$ sur I.	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$
Composé	$\boldsymbol{g(kx+p)}$ avec $\boldsymbol{(kx+p)} \in I$	$(g(kx+p))' = kg'(kx+p)$	$((3x-2)^2)' = 3 \times 2(3x-2) = 18x-12$
	$\sqrt{\boldsymbol{f}}$ avec $\boldsymbol{f(x) \neq 0}$ sur I.	$\left(\sqrt{\boldsymbol{f(x)}}\right)' = \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{2\sqrt{\boldsymbol{f(x)}}}$	$\left(\sqrt{3x+1}\right)' = \frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

Voir l'explication de cours et les exercices sur le site Kiffelesmaths.com

4- Application de la fonction dérivée

a- Signe d'une dérivée et sens de variation

Propriété1 (Du signe de la dérivée au sens de variation) :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, sauf pour un nombre fini de réels, elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, sauf pour un nombre fini de réels, elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Exemple 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 5$

f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3$

- Si $x < \frac{3}{2}$ alors $2x - 3 < 0$ c'est-à-dire $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$.
- Si $x > \frac{3}{2}$ alors $2x - 3 > 0$ c'est-à-dire $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		$\searrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	

Exemple 2 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}$

g est dérivable, si $x - 1 \neq 0$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$g'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	||	+	
g		$\searrow$	||	$\searrow$	

Exemple 3 :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 2$

h est une fonction polynôme donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = (x^3 + 2)' = 3x^2 > 0$ si $x \in \mathbb{R}^2$ et $h'(x) = 0$ seulement si $x = 0$.

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
h		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

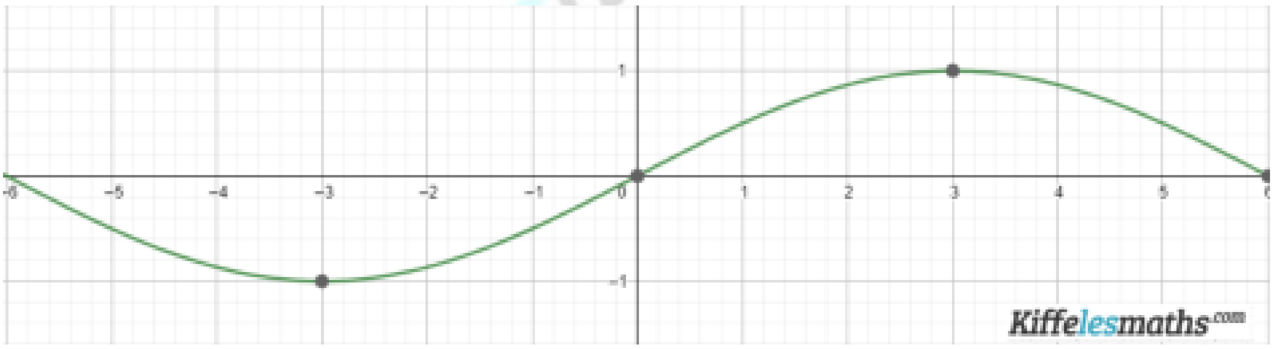
Propriété 2 (Du sens de variation au signe de la dérivée) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

- Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exercice d'application :

La courbe ci-dessous représente une fonction f sur $I = [-6; 6]$



Etudier le signe de $f'(x)$ sur I.

Rédaction :

- Sur $[-6; -3]$ f est décroissante, alors $f'(x) \leq 0$.
- Sur $[-3; 3]$ f est croissante, alors $f'(x) \leq 0$.
- Sur $[3; 6]$ f est décroissante, alors $f'(x) \leq 0$.

b- Extremums d’une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathrm{I}$.

- $f(\alpha)$ est un maximum global de f sur I, si pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{I}$, $f(x) \leq f(\alpha)$.
- $f(\alpha)$ est un maximum local de f au voisinage de α,signifie qu’il existe deux réels a et b de I tels que $\alpha \in]a; b[$ et pour tout $\alpha \in]\mathrm{a}; \mathrm{b}[, f(x) \leq f(\alpha)$.
- $f(\alpha)$ est un minimum global de f sur I, si pour tous $\mathrm{x} \in \mathrm{I}$, $f(x) \geq f(\alpha)$.
- $f(\alpha)$ est un minimum local de f au voisinage de α,signifie qu’il existe deux réels a et b de I tels que $\alpha \in]a; b[$ et pour tout $\alpha \in]\mathrm{a}; \mathrm{b}[, f(x) \geq f(\alpha)$.
- Un extremum est un minimum ou maximum.

Note : global = absolu.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $I = [-1; 3]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$
On a $f'(x) = 2x - 2$
Alors

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

$f(x) - f(1) = (x^2 - 2x + 3) - (1^2 - 2 \times 1 + 3) = x^2 - 2x + 3 - 2$
$f(x) - f(1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ sur $I = [-1; 3]$ donc $f(1) = 2$ est un minimum local au voisinage de 1.

Propriétés (admises):

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $\alpha \in \mathrm{I}$.

- Si $f(\alpha)$ est un extremum local de f alors $f'(\alpha) = 0$.
- Si f' s’annule en α en changeant de signe, alors $f(\alpha)$ est un extremum local de f.

Exemple :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$

f' S’annule en $\frac{3}{2}$ en changeant de signe, alors $f\left(\frac{3}{2}\right)$ est un minimum local de f.

Voir l’explication de cours et les exercices sur le site Kiffelesmaths.com

5- L'équation déférentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Définition :

Soit ω un réel non nul.

- L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ s'appelle équation déférentielle d'inconnu y.
- Toutes fonctions f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et tel que $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ est une solution de l'équation déférentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Exemples :

$\mathrm{y}'' + 4\mathrm{y} = 0$ et $\mathrm{y}'' + 5\mathrm{y} = 0$ sont des équations déférentielles.

Propriété :

Soit ω un réel non nul.

La solution générale de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y tel que $y(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Exemples :

- La solution générale de l'équation $\mathrm{y}'' + 4\mathrm{y} = 0$ est l'ensemble des fonctions $y(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
- La solution générale de l'équation $\mathrm{y}'' - 5\mathrm{y} = 0$ est l'ensemble des fonctions $y(x) = \alpha\cos(\sqrt{5}x) + \beta\sin(\sqrt{5}x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Cas particulier :

- Si $\omega = 0$ alors la solution générale de l'équation $\mathrm{y}'' = 0$ est l'ensemble des fonctions $y(x) = \alpha x + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com