1- Signe d'une dérivée et sens de variation

a- Du signe de la dérivée au sens de variation

Théorème :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, sauf pour un nombre fini de réels, elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, sauf pour un nombre fini de réels, elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Exemple 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 5$

f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3$

- Si $x < \frac{3}{2}$ alors $2x - 3 < 0$ c'est-à-dire $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$.
- Si $x > \frac{3}{2}$ alors $2x - 3 > 0$ c'est-à-dire $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗

Exemple 2 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}$

g est dérivable, si $x - 1 \neq 0$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$g'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	‖	+	
g	↘		‖	↘	

Exemple 3 :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 2$

h est une fonction polynôme donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = (x^3 + 2)' = 3x^2 > 0$ si $x \in \mathbb{R}^2$ et $h'(x) = 0$ seulement si $x = 0$.

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
h	↘		0	↗	

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Du sens de variation au signe de la dérivée

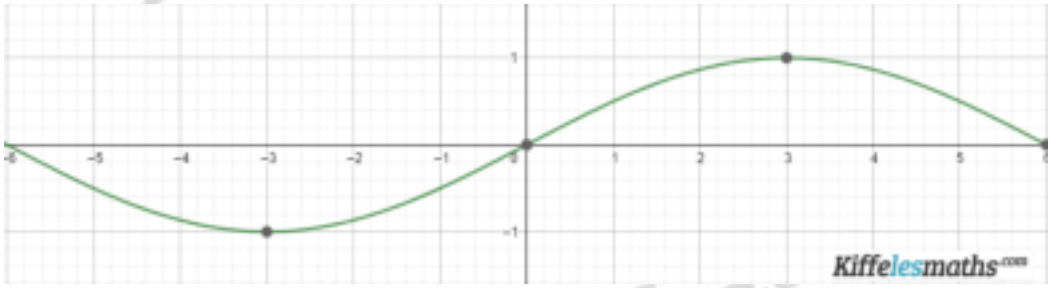
Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

- Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exercice d'application :

La courbe ci-dessous représentent une fonction f sur $I = [-6; 6]$



Etudier le signe de $f'(x)$ sur I.

Rédaction :

- sur $[-6; -3]$ f est décroissante, alors $f'(x) \leq 0$.
- sur $[-3; 3]$ f est croissante, alors $f'(x) \leq 0$.
- sur $[3; 6]$ f est décroissante, alors $f'(x) \leq 0$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

2- Extremums d'une fonction

a- Extremum local

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in I$.

- $f(\alpha)$ est un maximum global de f sur I, si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(\alpha)$.
- $f(\alpha)$ est un maximum local de f au voisinage de α,signifie qu'il existe deux réels a et b de I tes que $\alpha \in]a;b[$ et pour tout $\alpha \in]a;b[, f(x) \leq f(\alpha)$.
- $f(\alpha)$ est un minimum global de f sur I, si pour tous $x \in I$, $f(x) \geq f(\alpha)$.
- $f(\alpha)$ est un minimum local de f au voisinage de α,signifie qu'il existe deux réels a et b de I tes que $\alpha \in]a;b[$ et pour tout $\alpha \in]a;b[, f(x) \geq f(\alpha)$.
- Un extremum est un minimum ou maximum.

Note : global = absolu.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $I = [-1;3]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$
On a $f'(x) = 2x - 2$
Alors

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		↘	$f(1)$	↗	

$f(x) - f(1) = (x^2 - 2x + 3) - (1^2 - 2 \times 1 + 3) = x^2 - 2x + 3 - 2$

$f(x) - f(1) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ sur $I = [-1;3]$ donc $f(1) = 2$ est un minimum local au voisinage de 1.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et m et M deux réels.

- m est le minimum de f sur I si et seulement si :
  - $f(x) \geq m$ pour tout x de I.
  - et l'équation $f(x) = m$, a au moins une solution dans I.
- M est le maximum de f sur I si et seulement si :
  - $f(x) \leq M$ pour tout x de I
  - et l'équation $f(x) = M$, a au moins une solution dans I.

Exercice d'application :

Montrer que 1 est le maximum de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

Rédaction :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$f(x) - 1 = -x^2 + 4x - 3 - 1 = -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2 \leq 0$

C'est-à-dire $f(x) \leq 1$.
et on a $f(2) = 1$ donc 1 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

b- Extremums et dérivation.

Propriétés (admises):

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $\alpha \in I$.

- Si $f(\alpha)$ est un extremum local de f alors $f'(\alpha) = 0$.
- Si f' s'annule en α en changeant de signe, alors $f(\alpha)$ est un extremum local de f.

Exemple :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗

f' s'annule en $\frac{3}{2}$ en changeant de signe, alors $f\left(\frac{3}{2}\right)$ est un minimum local de f.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com