1- Expérience aléatoire

a- Définitions et vocabulaire

Définitions :

Une **expérience** est dite **aléatoire** si on ne peut pas en prévoir le résultat à l'avance.

Une **issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

L'univers est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire, noté généralement Ω (Ω se lit 'oméga').

Vocabulaire :

- Une partie de Ω est appelé **évènement**.
- Ω est appelé aussi « **évènement certain** ».
- $\emptyset$ est appelé l'évènement impossible.
- Un évènement élémentaire est un évènement qui ne contient qu'une seule issue.

Exemple :

Expérience aléatoire : On lance un dé non truqué numéroté de 1 à 6.

- Cette expérience compte 6 issues.
- L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- $A = \{1; 3; 5\}$ (Obtenir un nombre impair) et $B = \{1; 2\}$ obtenir un nombre inférieur ou égale à 2) sont des évènements.
- $C = \{5\}$ (Obtenir 5) est un évènement élémentaire.

b- Evènement contraire

Définition :

L'événement contraire d'un évènement A est l'évènement formé par toutes les issues qui ne réalisent pas l'évènement A.

L'événement contraire d'un évènement A est noté $\overline{A}$.

Remarque :

L'événement $\overline{A}$ est appelé aussi « le complémentaire de A dans Ω, noté $\Omega \backslash A$.

Exemples :

On lance un dé non truqué numéroté de 1 à 6.

Soient les deux évènements :

- $A = \{1; 3; 5\}$ (Obtenir un nombre impair)
- $D = \{4; 6\}$ (Obtenir un nombre pair supérieur ou égal à 4)

On a $\overline{A} = \{2; 4; 6\}$ et $\overline{D} = \{1; 2; 3; 5\}$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Arbre

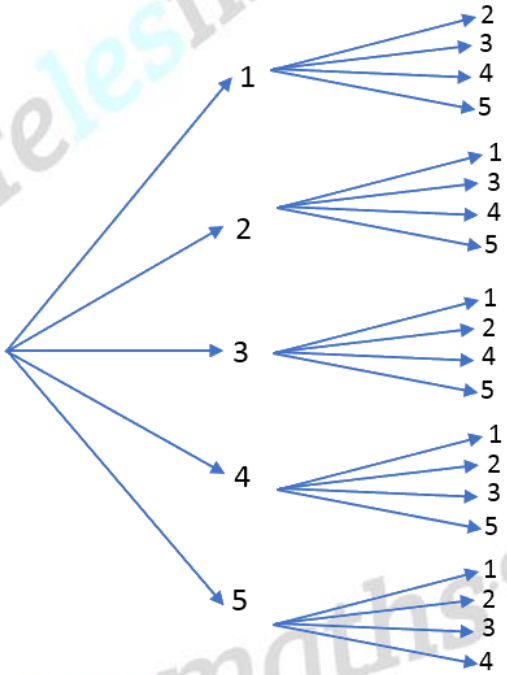
Un arbre permet de représenter et dénombrer les issues d'une expérience aléatoire, en particulier, lorsqu'on a une succession de plusieurs épreuves.

Exemple :

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5.

On tire au hasard deux boules successivement, sans remettre la première boule dans l'urne.

Représentation de cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre :



Cette expérience aléatoire comporte $5 \times 4 = 20$ issues.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

2- Calcul de probabilité

a- Loi de probabilité d'une expérience aléatoire

Définitions :

Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ consiste à attribuer à chacune des issues un nombre p_i positif ou nul, appelé **probabilité**, tel que $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \cdots + p_i = 1$.

Remarques :

- Quand chaque issue a la même probabilité de se produire qu'une autre, on est dans une situation d'équiprobabilité.
- La probabilité de l'évènement impossible égale à 0.
- La probabilité de l'évènement certain égale à 1.

Exemple :

On lance un dé non truqué numéroté de 1 à 6.

On obtient donc la loi de probabilité suivante :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Propriété (admise) :

En répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de chaque issue se stabilise autour d'une valeur.

Il est donc raisonnable de prendre cette valeur comme probabilité de l'issue.

b- Probabilité d'un événement

Définition :

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent cet événement.

Propriétés :

- Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égal à : $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$
- Pour tout évènement A on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple :

On lance un dé non truqué numéroté de 1 à 6.

Soit l'évènement : $A = \{1; 3\}$

- $P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (par définition)
- $P(A) = \frac{2}{6}$ (Si on utilise la propriétés)
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

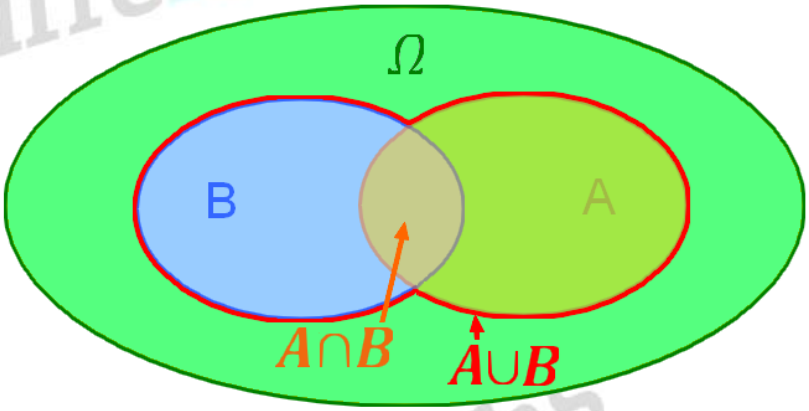
Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Intersection et réunion d'événements

Définitions :

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

- L'intersection de A et B est un évènement, noté $\boldsymbol{A \cap B}$ est l'évènement constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.
- La réunion de A et B est un évènement, noté $\boldsymbol{A \cup B}$ est l'évènement constitué des issues qui sont dans A, dans B ou dans $A \cap B$.
- On dit que les événements A et B sont incompatibles lorsque A∩B=∅.



Propriétés :

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, on a :

- $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- En général $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Exemple :

On lance un dé non truqué numéroté de 1 à 6.

On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Soit les deux événements :

- $\mathrm{A} = \{1; 3; 5\}$ (Obtenir un nombre impair)
- $\mathrm{B} = \{1; 2\}$ Obtenir un nombre inférieur ou égale à 2)

On a : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1\}$, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1; 2; 3; 5\}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1$ et $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 2 + 3 - 1 = 4$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com