Équations de droites

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

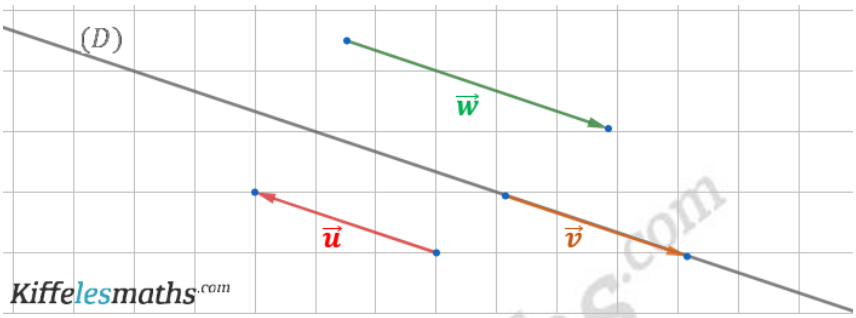
1- Equation d'une droite

a- Equation cartésienne d'une droite

Définition :

On appelle vecteur directeur d'une droite (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui Possède la même direction que la droite (D).

Exemples :



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (D).

Théorème et définition :

Dans un repère orthonormé, les coordonnées de l'ensemble des points $M(x;y)$ d'une droite vérifient une relation $ax+by+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels tel que $(a;b)\neq(0;0)$.
La relation $ax+by+c=0$ s'appelle équation cartésienne de la droite (D).
Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Remarques :

- Il existe une infinité d'équations cartésiennes d'une même droite.

Exemple d'application :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par le point $A(1;-2)$ et le vecteur $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur directeur de (D).

Rédaction :

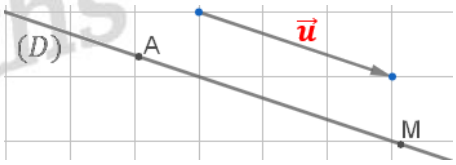
$M(x;y)\in(D)$ signifie que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

alors $\det(\vec{u},\overrightarrow{AM})=0$ or $\vec{u}(2;3)$ et $\overrightarrow{AM}(x-2;y-1)$

$$\begin{vmatrix}2 & x-2\\ 3 & y-1\end{vmatrix}=0$$

$$2(y-1)-3(x-2)=0$$

$$2y-2-3x+6=0$$



donc $-3x+2y+4=0$ est une équation cartésienne de la droite (D).

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Equation réduite d'une droite

Théorème et définition :

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$,

- Si $b = 0$ alors (D) est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = \frac{-c}{a}$, et $\vec{u}(0; a)$ est son vecteur directeur.
- Si $b \neq 0$, alors on peut écrire l'équation de (D) sous la forme $y = mx + p$, tel que $m = \frac{-a}{b}$ et $p = \frac{-c}{b}$.
  - L'équation $y = mx + p$ est appelé équation réduite de la droite (D).
  - Le nombre m s'appelle coefficient directeur de la droite (D).
  - p s'appelle ordonnée à l'origine de la droite (D).
  - Le vecteur $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de (D).

Remarque :

L'équation réduite d'une droite est unique.

Propriété :

Soit (D) une droite qui passe par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, tel que $x_A \neq x_B$, le coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est égal à $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et l'ordonnée à l'origine $p = y_A - mx_A$.

Exercice d'application :

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB), tels que $A(3; 2)$ et $B(-1; 1)$.

Rédaction :

Le coefficient directeur de (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{-1-3} = \frac{1}{4}$

L'ordonnée à l'origine $p = 2 - \frac{1}{4} \times 3 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

Donc l'équation réduite de (AB) est $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

Remarque :

On peut associer une équation réduite $y = mx + p$ d'une droite (D), à une fonction affine $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, la fonction f est croissante.
- Si $m < 0$, la fonction f est décroissante.
- Si $m = 0$, la fonction f est constante et (D) est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

Kiffelesmaths.com

2- Positions relatives de droites

a- Droites parallèles ou sécantes

Théorème :

Soient deux droites (D) et (D') d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

- Si $ab' - a'b \neq 0$, alors (D) et (D') sont sécantes.
- Si $ab' - a'b = 0$ et si a, b et c sont respectivement proportionnels à a', b' et c' alors (D) et (D') sont confondues.
- Si $ab' - a'b = 0$ et si a, b et c ne sont pas respectivement proportionnels à a', b' et c' alors (D) et (D') sont strictement parallèles.

Exemples :

- Les deux droites d'équations $2x - y + 3 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$ sont strictement parallèles.
- Les deux droites d'équations $2x - y + 3 = 0$ et $4x - 2y + 6 = 0$ sont confondues.
- Les deux droites d'équations $2x - y + 3 = 0$ et $2x - 3y + 1 = 0$ sont sécantes.

Théorème :

Soient deux droites (D) et (D') d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

- Si $m \neq m'$, (D) et (D') sont sécantes.
- $m = m'$ et $p \neq p'$, (D) et (D') sont strictement parallèles.
- $m = m'$ et $p = p'$, (D) et (D') sont confondues.
- Si $m \times m' = -1$, $(D) \perp (D')$.

Exemples :

- Les deux droites d'équations $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 3$ sont strictement parallèles.
- Les deux droites d'équations $y = 2x + 1$ et $y = 3x + 2$ sont sécantes.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Système d'équations

Théorème :

Si deux droites (D) et (D') d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, sont sécantes alors les coordonnées de leur point d'intersection sont solutions du système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

Exercice d'application :

Déterminer l'intersection des deux droites (D) et (D') d'équations respectives $x + 2y - 1 = 0$ et $2x - 3y + 3 = 0$.

Rédaction :

On a $1 \times (-3) - 2 \times 2 = -7$ donc (D) et (D') sont sécantes en un point $A(x;y)$ tel que $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$.

A partir de la première équation on obtient $x = -2y + 1$

en substituant x dans la deuxième équation :

$$2(-2y + 1) - 3y + 3 = 0$$

$$-4y + 2 - 3y + 3 = 0$$

$$-7y + 5 = 0$$

$$y = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$$

en reportant la valeur de y dans la première équation :

$$x = -2 \times \frac{5}{7} + 1 = \frac{-10}{7} + \frac{7}{7} = \frac{-3}{7}$$

Le point d'intersection des deux droites est $A\left(\frac{-3}{7};\frac{5}{7}\right)$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com