Calcul vectoriel et produit scalaire

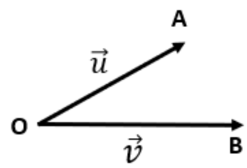
1- Les différentes expressions du produit scalaire

a- Définition du produit scalaire

Norme d'un vecteur :

Soient $\vec{u}$ un vecteur et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Définition :

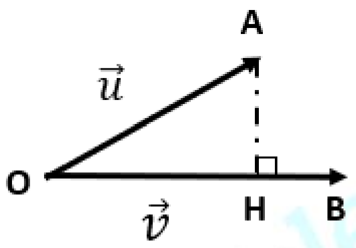
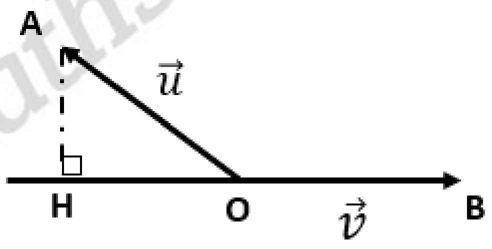


Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

O, A et B trois points tels que : $\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{OA} \\ \vec{v} = \overrightarrow{OB} \end{cases}$

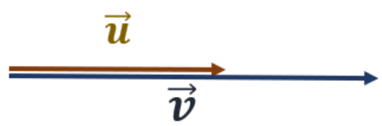
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et soit H le projeté orthogonal de A sur (OB).

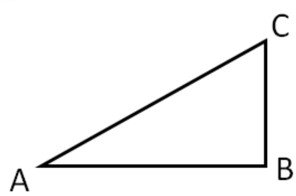
Si $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH}$ ont le même sens	Si $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire
	
Alors $\vec{u}.\vec{v} = OB \times OH$	Alors : $\vec{u}.\vec{v} = -OB \times OH$

Remarque :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens	Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire
	
Alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$	Alors : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

Application :



Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 2$

B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 2^2 = 4$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

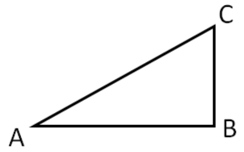
b- Formule trigonométrique

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, on a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.

Exemples :

ABC un triangle rectangle en B, tel que $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3$

c- Dans une base orthonormée

Propriété :

Dans une base orthonormée, soient deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$

On a $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2$.

Exemple :

Soient les deux vecteurs $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

alors $\vec{u}.\vec{v} = 2 \times (-1) + 3 \times \frac{1}{3} = -2 + 1 = -1$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

2- Propriétés du produit scalaire

a- Orthogonalité

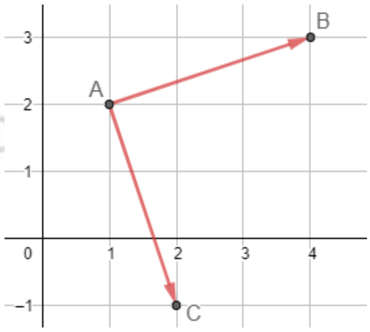
Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriété :

Soient A, B et C trois points distincts.
Le vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, si et seulement si, les deux droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exemple :



Soient $A(1;2)$, $B(4;3)$ et $C(2;-1)$
On a $\overrightarrow{AB}(3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-3)$
alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 3 - 3 = 0$
Donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

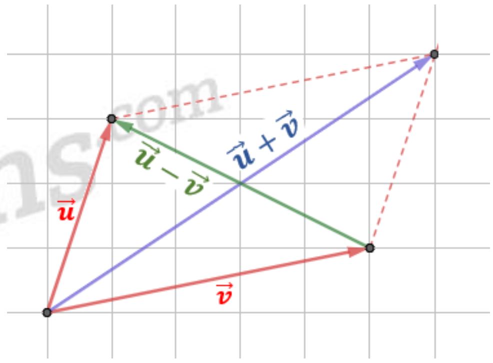
b- Bilinéarité et symétrie du produit scalaire

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel, on a :
$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$, $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.

c- Norme et produit scalaire

Propriété :



Soient deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

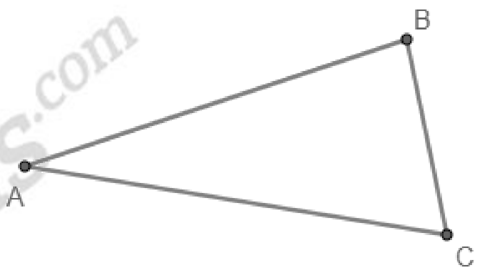
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2)$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

3- Applications du produit scalaire

a- Théorème d'ALKACHY

Théorème :



Soit ABC un triangle quelconque

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$$

Si on pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, on a

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

Démonstration :

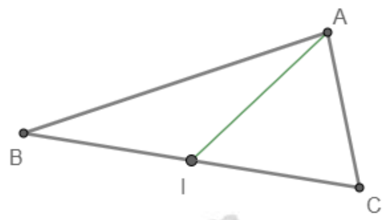
$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BA}^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} + AC^2$

$\mathrm{BC}^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

b- Théorème de la médiane

Théorème :



Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de $[BC]$, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

et $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 + \overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC} = AI^2 + \overrightarrow{AI}.\vec{0} - IC^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Produit scalaire et cercle

Propriétés :

Soient A, B et M trois points du plan.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, si et seulement si, M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Cela revient à dire que l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com