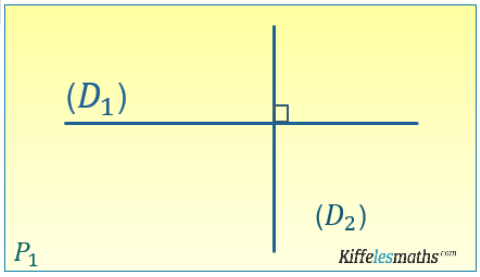
Orthogonalité et distances dans l'espace

1- Orthogonalité et produit scalaire.

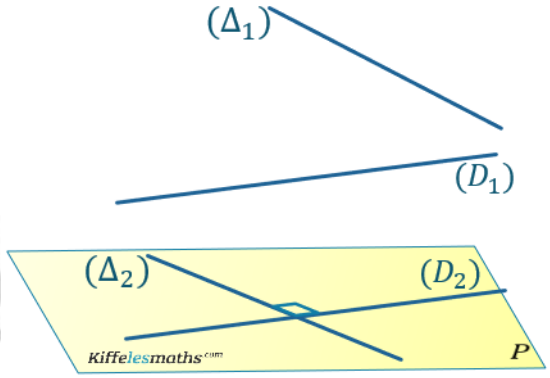
a- Orthogonalité dans l'espace.

Définitions :

- Si deux droites sont perpendiculaires dans un plan de l'espace, on dit qu'elles sont perpendiculaires dans l'espace.



- Deux droites sont dites orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.
  C'est à dire :
  Si $(\Delta_2) \perp (D_2)$dans un plan (P) et $\begin{cases}(\Delta_1) // (\Delta_2)\\(D_1) // (D_2)\end{cases}$ donc $(\Delta_1) \perp (D_1)$.



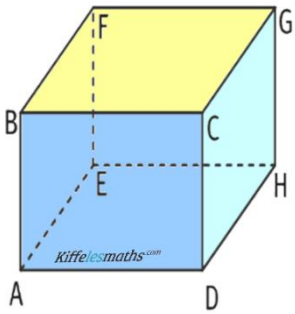
- Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque les droites dirigées par ces vecteurs sont orthogonales.
- Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément coplanaires.

Exemple :

ABCDEFGH est un cube.



On a $(AB) \perp (AD)$ et $\begin{matrix}(AB) // (AB)\\(AD) // (EH)\end{matrix}$ donc $(AB) \perp (EH)$.

- Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

Propriété :

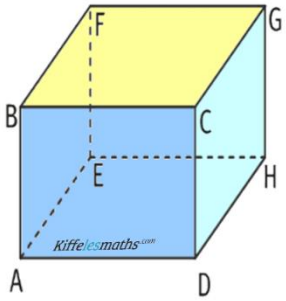
Deux droites sont orthogonales si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Remarque :

L'intersection de deux droites perpendiculaires (Dans un plan) est nécessairement un point alors que l'intersection de deux droites orthogonales peut être vide (dans l'espace).

Exemple :

ABCDEFGH est un cube.



- (AB) et (AD) sont perpendiculaires.
- (AB) et (DH) sont orthogonales.

Propriété :

Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, un vecteur directeur de la droite est orthogonal à une base de ce plan.

Propriété (admise) :

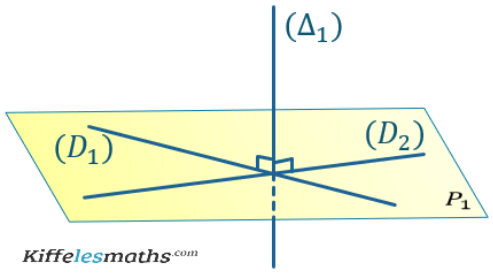
Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Exemple :

Dans cet exemple on a :

(D_1) *et* (D_2) deux droites sécantes dans le plan (P_1).

$(\Delta_1) \perp (D_1)$ et $(\Delta_1) \perp (D_2)$ donc $(\Delta_1) \perp (P_1)$.



Définition :

On considère une droite (D) orthogonale à un plan (P).

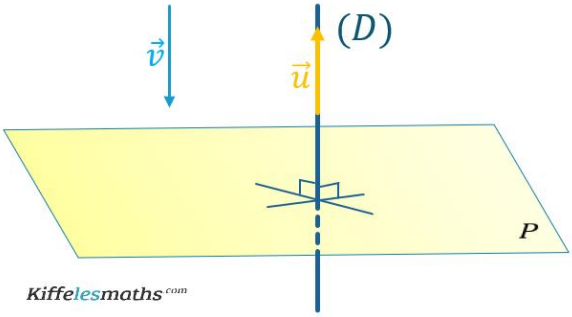
Tout vecteur directeur de (D) est appelé vecteur normal au plan (P).

Exemple :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs de la droite (D).

$(D) \perp (P)$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (P).

$\vec{v}$ est aussi un vecteur normal au plan (P).



Voir les exercices d'application sur le site Kiffelesmaths.com

b- Le produit scalaire dans l'espace.

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$.

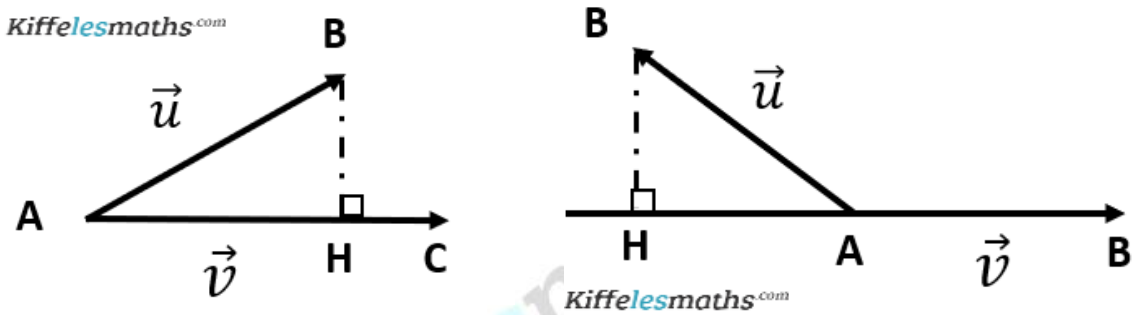
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriété :

Soient A, B et C trois points distincts de l'espace et soit H le projeté orthogonale de B sur (AC).

Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AH \times AC & \text{si H} \in [\text{AC}) \\ -AH \times AC & \text{si H} \notin [\text{AC}) \end{cases}$

Exemples :

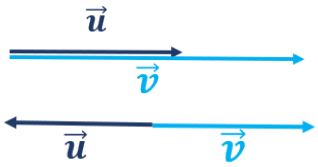


$\vec{u}.\vec{v} = AH \times AC$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v} = -AH \times AC$

Conclusion :

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens.} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$



Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un réel, on a :

- Symétrique : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
- Linéarité : $(\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$.
- $(\text{k}\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.
- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u}.\vec{u} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2] = \frac{1}{2}[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$ (Ces identités sont appelées les formules de polarisation)

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Orthogonalité de deux vecteurs et produit scalaire.

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriétés :

Si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

2- Géométrie analytique dans l'espace.

a- Distance dans l'espace.

Définition :

Une base orthonormée de l'espace est la donnée de trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ tels que $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\|$.

Remarque :

Un repère orthonormé est la donnée d'un point (l'origine) et d'une base orthonormée.

Propriétés :

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

- Pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.
- Pour tous points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ on a $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Définition 1 :

Les formules dans l'espace sont similaires à celles que l'on connaît dans le plan avec la cote de plus (z).

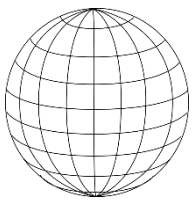
Propriété :

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé de l'espace $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Equation d'une sphère.

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, une équation de la sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R est $(x-a)^2+(x-b)^2+(z-c)^2 = 0$.



Exemple :

Une équation de la sphère de centre $\Omega(1;-2;\frac{1}{2})$ et de rayon 3 est

$(x-1)^2+(x+2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = 9$.

c- Équation cartésienne d'un plan.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Définition :

Soit (P)un plan passe par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in (P)$ signifie que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

Alors $ax+by+cz+d=0$ où $d=-(ax_A+by_B+cz_C)$ est ne équation cartésienne de (P).

Remarque :

- En pratique, en détermine la valeur de d en utilisant les coordonnés d'un point appartenant a plan (P).
- Si $ax+by+cz+d=0$ est une équation cartésienne de (P) alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P).

Exemple :

Une équation cartésienne du plan (P) qui passe par $A(2;-1;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est $5x+y+\frac{1}{2}z+d=0$ et $d=-(10-1+2)=-11$.

Donc $(P): 5x+y+\frac{1}{2}z-11=0$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

3- Projection orthogonale.

a- Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite.

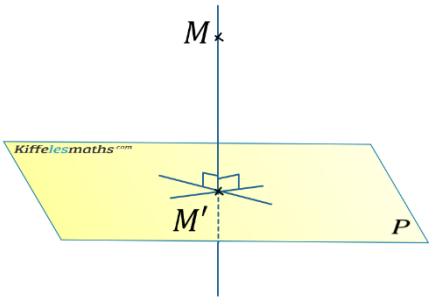
Définition :

Soit (P) un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$ et M un point extérieur au plan (P).

Le projeté orthogonal de M sur (P) est l'intersection du plan (P) et de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M.

Exemple :

Sur l'image à côté, M' est le projeté orthogonal de M sur le plan (P).



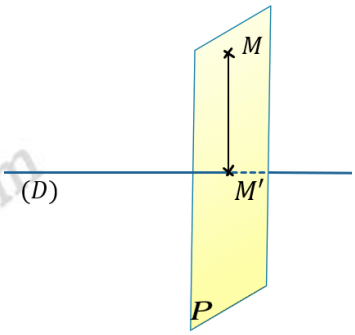
Définition :

Soit (D) une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point extérieur a cette droite.

Le projeté orthogonal de M sur (D) est l'intersection du plan (P) normal à $\vec{u}$ avec la droite (D).

Exemple :

Sur l'image à côté, M' est le projeté orthogonal de M sur la droite (D).



Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Distance d'un point à un plan ou une droite.

Définition et notation : (distance d'un point à un plan)
Soient (P) un plan de l'espace et M un point.
La distance du point M au plan (P) est la plus petite des longueurs MM' des où $M' \in (P)$, cette distance est notée $d(M,P)$.

Propriété :
Soit (P) un plan de l'espace d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ contenant un point A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et soit $M(x_M; y_M; z_M)$ un point.

$d(M,P) = MM'$ tel que M' est le projeté orthogonal de M sur le plan (P).

Et on a $d(M,P) = \frac{|\overrightarrow{MA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. (la relation $d(M,P) = \frac{|\overrightarrow{MA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ est vrais pour chaque points A du plan (P)

Exemple :
Soient $(P): 2x + y - 3z + 5 = 0$ et $M(1;2;0)$,

$$d(M,P) = \frac{|2x_M + y_M - 3z_M + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 \times 1 + 2 - 3 \times 0 + 4|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

Donc $d(M,P) = \frac{5\sqrt{14}}{14}$

Définition et notation : (distance d'un point à une droite)

Soient (D) une droite de l'espace et M un point.

La distance du point M a la droite (D) est la plus petite des longueurs MM' des où $M' \in (D)$, cette distance est notée $d(M, D)$.

Propriété :

Si H est le projeté orthogonal d'un point A sur une droite (D)

alors $d(A, D) = AH$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com