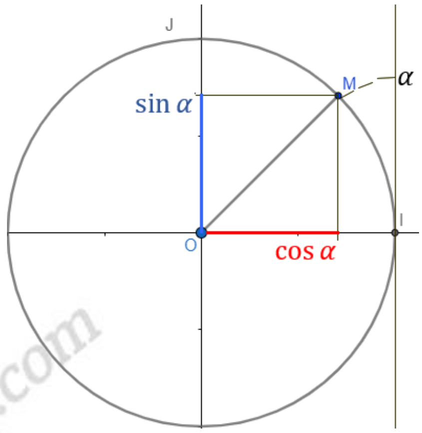
1- Rappel

$(O\,;I;J)$ un repère orthonormal et (C) un cercle trigonométrique de centre O.

a- Sinus et cosinus d'un réel

Sinus et cosinus d'un réel :

Soit α un réel et M sont son point-image sur le cercle trigonométrique.



- L'abscisse de M est appelée cosinus de α, noté $\cos\alpha$.
- L'ordonnée de M est appelée sinus de α, noté $\sin\alpha$.
- Les coordonnées de M sont $(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$.

Propriété :

Pour tout réel α, on a :

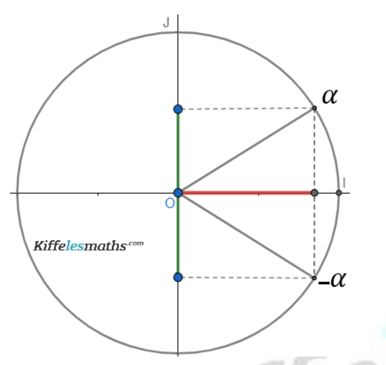
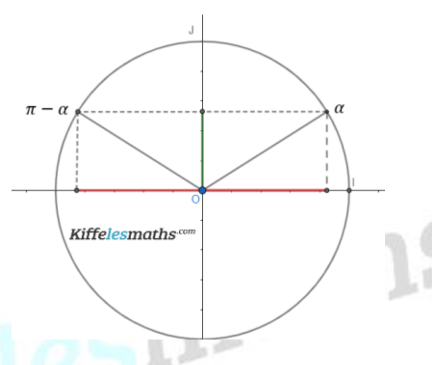
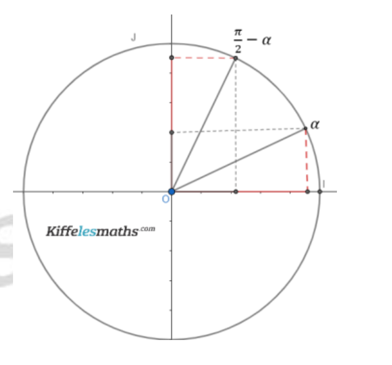
- $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.
- $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$ et $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$.

Valeurs remarquables du sinus et cosinus.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Relations entre sinus et cosinus d'un réel α

Pour tout réel α, on a :

		
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

Application :

- $cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Restriction du domaine d'étude

Propriétés (admises) :

Si f est une fonction paire ou impaire, alors il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+ \cap D_f$ ou $\mathbb{R}^- \cap D_f$.

Si f est une fonction périodique de période T, alors il suffit de l'étudier sur l'intersection de n'importe quel intervalle d'amplitude T avec D_f.

Corollaire (admis) :

Si f est une fonction périodique de période T, alors il suffit de l'étudier sur l'intersection de n'importe quel intervalle d'amplitude T avec D_f.

Si f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est paire (ou impaire) et périodique de période T, alors il suffit de l'étudier sur $\left[0; \frac{T}{2}\right]$.

Conclusion :

Le domaine d'étude des fonctions sinus et cosinus est $[0; \pi]$.

2- Fonctions sinus et cosinus

a- La fonction sinus

Propriétés :

La fonction $x \to sin\, x$ est une fonction impaire c'est-à-dire $sin\,(-x) = -sin\, x$.

La fonction $x \to sin\, x$ est une fonction périodique de période 2π c'est-à-dire $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

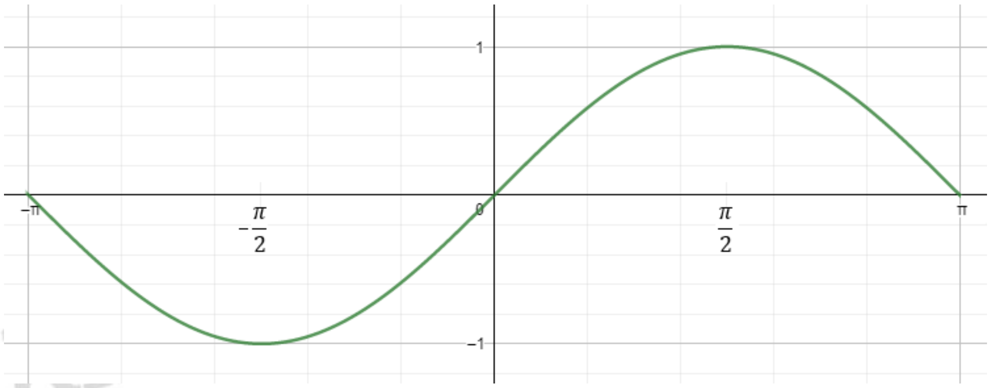
Dérivation :

La fonction **sinus** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\sin x)' = -\cos x$

Tableau de variation :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sinus$	0	↗	1	↘	0

Courbe de la fonction sinus :



b- La fonction cosinus

Propriétés :

La fonction $x \to cos\, x$ est une fonction paire c'est-à-dire $cos\,(-x) = cos\, x$.

La fonction $x \to cos\, x$ est une fonction périodique de période 2π c'est-à-dire $cos(x + 2\pi) = cos\, x$.

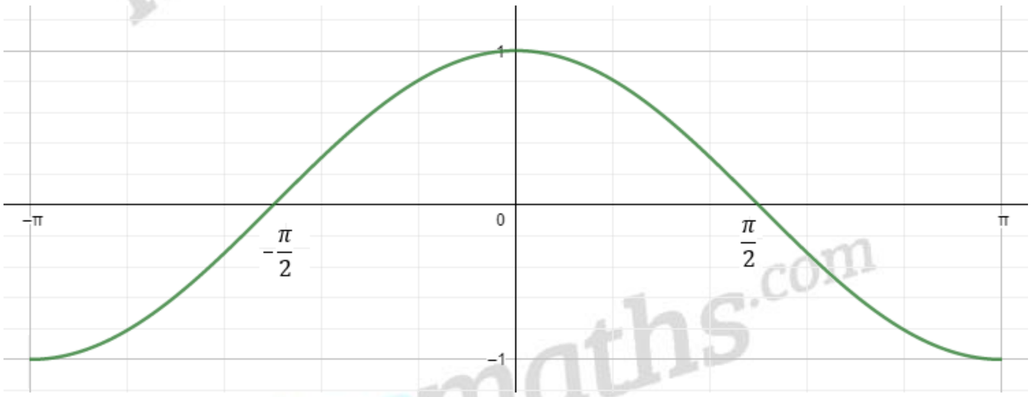
Dérivation :

La fonction **cosinus** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\cos x)' = -\sin x$

Tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$cosinus$	1 ↘	0 ↘	-1

Courbe de la fonction cosinus :



Application :

Soit α un réel et $k \in \mathbb{Z}$.

- On a $\boldsymbol{cos}(-x) = \boldsymbol{cos}\, x$ alors les solutions de de l'équation $\boldsymbol{cos}\, x = \cos\alpha$ sont : $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$.

Exemple :

Les solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ sont $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

- On a $sin(\pi - x) = sin\, x$ alors les solutions de de l'équation $sin\, x = sin\, \alpha$ sont : $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$.

Exemple :

Les solutions de l'équation $sin\, x = \frac{1}{2}$ sont $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

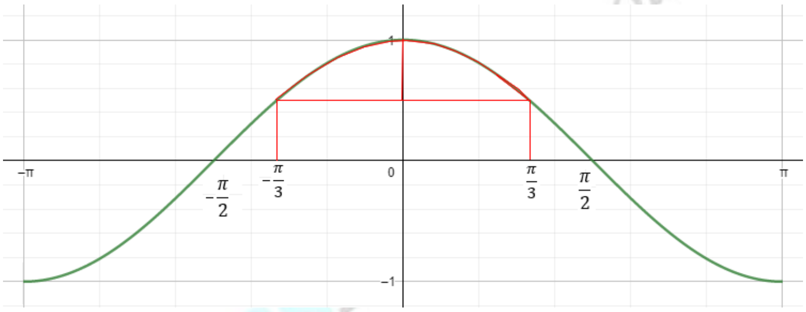
Exercices d'application :

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les inéquations $\cos x \geq \frac{1}{2}$ et $\sin x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Rédaction :

- L'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$:

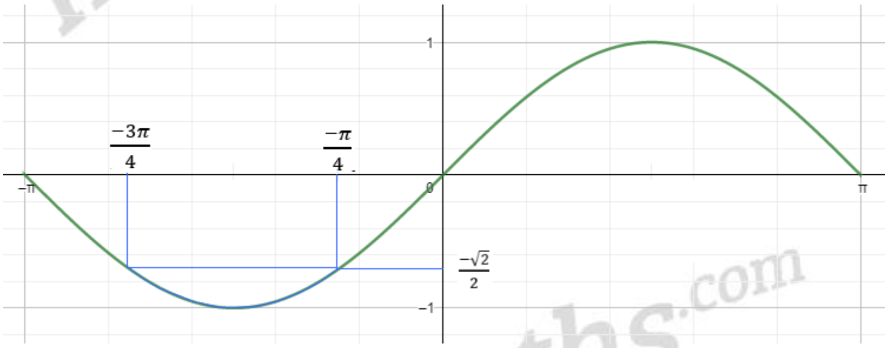
$\cos x = \frac{1}{2}$ signifier que $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$ est $\left[\frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

- L'inéquation $\sin x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$:

$\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ signifier que $x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$ est $\left[\frac{-3\pi}{4}; \frac{-\pi}{4}\right]$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo. sur le site Kiffelesmaths.com