Limites de suites et récurrence

Remarque préliminaire : Lorsque l'on cherche à déterminer la limite d'une suite, on fait toujours tendre n vers $+\infty$.

1- Limites finies :

a- Définition et notation :

Définition :

Une suite (U_n) a pour limite le réel l lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on a $l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon$.

Notation :

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$.

Propriété (admise) :

Si une suite (U_n) a pour limite le réel l, alors cette limite est unique.

Propriétés :

Soit $(n\,;k) \in \mathbb{N}^2$ et $q \in \mathbb{R}$, on a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, plus généralement $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \ si\ k \geq 1$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Si $-1 < q < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $q \leq -1$ on a $U_n = q^n$ n'a pas de limite.

Exemples :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{7}{2} \times \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \frac{7}{2} \times 0 = 0$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{11}\right)^n = 0$;

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0$$

b- Convergence :

Définitions :

- Une suite convergente est une suite qui a pour limite un nombre réel l. On dit aussi que la suite converge vers l.
- Une suite divergente est une suite qui ne converge pas.

Exemples :

- La suite $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est une suite convergente.
- La suite $V_n = (-2)^n$ est une suite divergente.

Application et méthode 01 Kiffelesmaths.com

c- Théorème de convergence monotone :

Définitions :

- Une suite (U_n) est majorée par un réel M, si pour tout entier naturel n, on a $U_n \leq M$.

On dit que M est un majorant de U_n.

- Une suite (U_n) est minorée par un réel m, si pour tout entier naturel n, on a $U_n \geq m$.

On dit que m est un minorant de (U_n) .

- Une suite (U_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque : Une suite majorée (respectivement minorée) possède une infinité de majorants (respectivement minorants).

Exemples :

La suite $U_n = \frac{1}{n^2+1}$ est majorée par 1 car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leq 1$.

La suite $U_n = \frac{n+3}{2}$ est minorée par $\frac{3}{2}$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq \frac{3}{2}$.

La suite $U_n = (-1)^n$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-1 \leq U_n \leq 1$.

Théorème de convergence monotone (admis) :

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.

Exemples :

La suite $U_n = \frac{1}{n^2+1}$ converge car elle est décroissante et minoré par 0.

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + 2 \\ V_0 = 2 \end{cases}$ converge car elle est croissante et majoré par 4.

Application et méthode 02 Kiffelesmaths.com

2- Limites infinies :

Définition 1 :

Une suite (U_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, pour tout réel M, l'intervalle $[M; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel M, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $U_n \geq M$.

Notation :

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Propriétés :

Soit $(n\,; k) \in \mathbb{N}^2$ et $q \in \mathbb{R}$, on a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, plus généralement $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty\ si\ k \geq 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- Si $q > 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Exemples :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = 3 \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$ car $\frac{5}{3} > 1$.

Définition 2 :

Une suite (U_n) a pour limite $-\infty$ lorsque, pour tout réel M, l'intervalle $]-\infty; M]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel M, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $U_n \leq M$.

Notation :

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

Propriété :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-U_n) = -\infty$.

Exemples :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$.

Propriétés :

- Si (U_n) est une suite croissante non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- Si (U_n) est une suite décroissante non minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

Application et méthode 03 Kiffelesmaths.com

3- Opérations sur les limites :

a- Limite d'une somme de suites :

Propriétés (admises) :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites et soient l et l' deux réels, on a :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n + V_n =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F. I.**

(F. I. = Forme indétermiée)

Remarque : Une forme indéterminée ne signifie pas qu'il n'y a pas de limite.

Exemples :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} = 0 + 0 = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + 7 = 0 + 7 = 7$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 - \sqrt{n} = -\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2} - n^2$ (F. I) Mais si on fait un peu de calcul on trouve :

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2} - n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - 1\right) n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2} n^2 = -\infty$.

Application et méthode 04 Kiffelesmaths.com

b- Limite d'un produit de suites :

Propriétés (admises) :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites et soient l et l' deux réels, on a :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \times V_n =$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F. I.**

($\pm\infty$ signifier que soit $+\infty$ ou $-\infty$)

Exemples :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -n(n^2+1) = -\infty$ Car $\lim\limits_{n\to+\infty} -\mathrm{n} = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1 = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n(1-\sqrt{n}) = -\infty$ Car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\mathrm{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sqrt{n}) = -\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n \times \left(\frac{7}{3}\right)^n = +\infty$ Car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\mathrm{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{3}\right)^n = -\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1-n^2)$ $(\mathrm{F.I})$ Mais si on fait un peu de calcul on trouve :

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1-n^2) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{n^2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - n = -\infty$.

Application et méthode 05 Kiffelesmaths.com

a- Limite d'un quotient de suites :

Propriétés (admises) :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites telle que (V_n) ne s'annule jamais et soient l et l' deux réels, on a :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\mathbf{0}$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > \mathbf{0}$	$l' < \mathbf{0}$	$l' > \mathbf{0}$	$l' < \mathbf{0}$	0	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\mathbf{F.I.}$	$\mathbf{F.I.}$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$	$l > \mathbf{0}$ ou $+\infty$	$l > \mathbf{0}$ ou $+\infty$	$l < \mathbf{0}$ ou $+\infty$	$l < \mathbf{0}$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ et	$\boldsymbol{V_n > 0}$	$\boldsymbol{V_n < 0}$	$V_n > \mathbf{0}$	$V < \mathbf{0}$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+2}{n^2+1} = 0$ Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}+2\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1 = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$ $(\mathrm{F.I})$ Mais si on fait un peu de calcul on trouve :

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{3}{n^2})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}}\right) = 0 \times 1 = 0.$

Application et méthode 06 Kiffelesmaths.com

Application et méthode 07 Kiffelesmaths.com

4- Limites et comparaison :

a- Théorème de comparaison :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites telles que $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang n_0.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

Exemples :

- Soit (U_n) une suite telle que $U_n < -2\sqrt{n}$:

D'après le théorème de comparaison on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\sqrt{n} = -\infty$ et $U_n < -2\sqrt{n}$.

- Soit (V_n) une suite telle que $V_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$:

D'après le théorème de comparaison on a $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ et $V_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Application et méthode 08 Kiffelesmaths.com

b- Théorème des gendarmes :

Théorème (admis) :

Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites telles que $V_n \leq U_n \leq W_n$ à partir d'un certain rang n_0.

Si (V_n) et (W_n) converge vers la même limite l alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

Exemple :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $U_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$:

On sait que $-1 < \sin(n) < 1$ et $\frac{1}{n^2+1} > 0$ alors $\frac{-1}{n^2+1} < \frac{\sin(n)}{n^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Application et méthode 09 Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com