Continuité

1- Notion de Continuité

a- Fonction continue

<u>Définitions :</u>

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- f est continue en x_0 équivalent à $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue en x_0 équivalent à $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue sur I lorsqu'elle continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$.
- f est continue sur I si l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

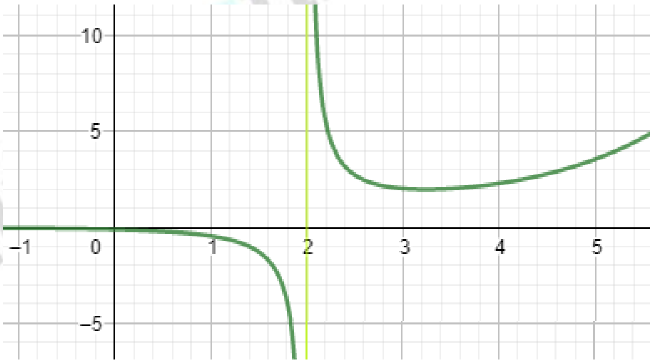
<u>Exemples :</u>

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \; si \; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

On a $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$

Alors $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1.

- la fonction représentée sur le graphique ci-dessous n'est pas continue en 2.



<u>Fonctions continue :</u>

- Les fonctions polynômes, la fonction valeur absolue et la fonction exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle contenu dans leur ensemble de définition.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Les fonctions références sont continue sur leur domaine de définition.

<u>Exemples :</u>

- Les fonctions $x \to x^3 - 4x^2 + 1$, $x \to |2x-3|$ et $x \to e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \to \sqrt{x-3}$ est continue sur $[3; +\infty[$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Opérations sur les fonctions continues

Propriété :

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque :

Une fonction continue sur un intervalle I, n'est pas toujours dérivable sur I.

Exemples :

- La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ mais elle n'est pas dérivable en 0.
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier mais n'est pas dérivable en 0.

Propriété :

- Si deux fonctions f et g sont continues sur un intervalle I, alors $f+g$ et $f \times g$ sont continue sur I, et si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Exercice d'application :

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x}$.

Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

Rédaction :

f est le produit de deux fonctions continues sur $[0;+\infty[$, elle est donc continue sur $[0;+\infty[$.

Propriété :

Si $f$et g deux fonctions définies successivement sur deux intervalles I et J, et si pour tous $x \in I$, $f(x) \in J$ alors la fonction gof est continue sur I.

Exemple :

Soit les deux fonctions $f : x \longmapsto x^2+1$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

$gof(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$

f et g sont deux fonctions continues successivement sur $I = \mathbb{R}$ et $J = [0;+\infty[$

Pour tout $x \in I$ on a $x^2+1 > 0$ c'est-à-dire $f(x) \in J$

Donc gof est continue sur $I = \mathbb{R}$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

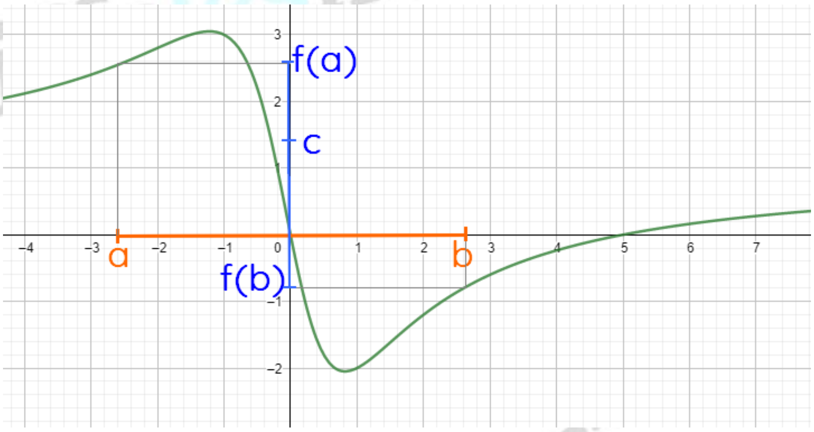
2- **Le théorème des valeurs intermédiaires**

a- Cas général

Théorème des valeurs intermédiaire :

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et $c \in \mathbb{R}$.

Si $c \in [f(a); f(b)]$ alors l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$.



Cas particulier :

si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$

alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$.

Exemple :

Soit $f(x) = x^3 - x - 3$

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $[1{,}6; 1{,}7]$.

$f(1{,}6) = (1{,}6)^3 - 1.6 - 3 = -0.504$ et $f(1{,}7) = (1{,}7)^3 - 1.7 - 3 = 0.212$

On a $f(1{,}6) \times f(1{,}7) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1{,}6; 1{,}7]$.

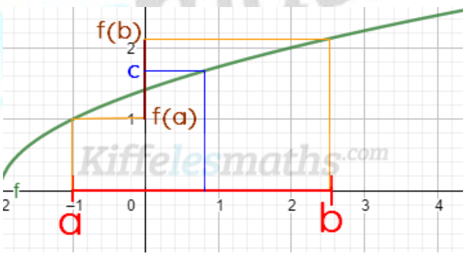
Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Cas de fonctions strictement monotones

Corollaire (du Théorème des valeurs intermédiaire):

si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $c \in \mathbb{R}$.

Si $c \in [f(a); f(b)]$ alors l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.



Remarque :

On peut aussi utiliser des limites si f n'est pas définie en a ou b ou bien encore des limites en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Exercice d'application :

Montrer que l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $[2\,;+\infty[$.

Rédaction

Soit la fonction $f: x \longmapsto x^2 - 3x + 1$.

f est continue et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$,

$f(2) = -1$ et $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Or $0 \in [-1; \infty[$ donc l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $[2\,;+\infty[$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

3- Application aux suites

a- Applications de la continuité

Propriétés :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) est une suite tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Si (u_n) converge vers un réel $a \in I$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple :

Soient $f(x) = x^2 + 3$ et $u_n = \frac{1}{n+1}$

f est continue sur $[0,1]$ et $0 < \frac{1}{n+1} < 1$ c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(0) = 3$.

b- Théorème du point fixe

Théorème du point fixe :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I tel que $f(I) \cup I$.

(u_n) est une suite tel que $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si (u_n) converge vers $l \in I$ alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com