Equations, inéquations et systèmes

1- Equations

a- Equation de la forme $ax + b = 0$.

Définition

Une équation du premier degré à une seule inconnue x est une égalité de la forme: $ax + b = 0$ tels que $a \in R^*$ et $b \in R$.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette égalité.

Exemples :

- La solution de l'équation $2x - 1 = 0$ est $x = \frac{1}{2}$.
- La solution de l'équation $x - 3 = 0$ est $x = 3$.
- La solution de l'équation $\frac{1}{2}x - \sqrt{2} = 0$ est $x = 2\sqrt{2}$.

b- Equation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriété :

Soient a, b, c et d des réels avec a et c non nuls.

$(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$

Exercice d'application :

Résoudre dans R les équations $(x - 2)(x + 3) = 0$ et $x(3x - 1) = 0$.

Rédaction :

- $(x - 2)(x + 3) = 0$ équivaut à $x - 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$
  soit $x = 2$ ou $x = -3$
  donc les solutions de l'équation $(x - 2)(x + 3) = 0$ sont 2 et -3.
- $x(3x - 1) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $3x - 1 = 0$
  Soit $x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$
  donc les solutions de l'équation $x(3x - 1) = 0$ sont 0 et $\frac{1}{3}$.

c- Equation de la forme $x^2 = a$.

Propriété :

Soit a un réel.

- Si $a < 0$ l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solutions dans R.
- Si $a = 0$, $x^2 = a$ équivaut à $x = 0$.

- Si $a > 0$, $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Exercice d'application :

Résoudre dans R les équations $2x^2 - 6 = 0$ et $x^2(x^2+1) = 0$.

Rédaction :

- $2x^2 - 6 = 0$ équivaut à $2x^2 = 6$
  C'est-à-dire $x^2 = \frac{6}{2} = 3$ alors $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
  Donc les solutions de l'équation $2x^2 - 6 = 0$ sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$
- $x^2(x^2+1) = 0$ équivaut à $x^2 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$
  C'est-à-dire $x = 0$ ou $x^2 = -1$
  Or, la deuxième égalité est impossible, donc la seule solution de l'équation $x^2(x^2+1) = 0$ est 0.

d- Equation de la forme $ax^2 + bx = 0$.

$ax^2 + bx = 0$ équivaut à $x(ax+b) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $ax + b = 0$

Exercice d'application :

Résoudre dans R les équations $2x^2 - 6x = 0$ et $x - 2x^2 = 0$.

Rédaction :

- $2x^2 - 6x = 0$ équivaut à $x(2x-6) = 0$
  C'est-à-dire $x = 0$ ou $2x - 6 = 0$
  C'est-à-dire $x = 0$ ou $2x = 6$
  C'est-à-dire $x = 0$ ou $x = \frac{6}{2} = 3$
  Donc les solutions de l'équation $2x^2 - 6x = 0$ sont 0 et 3
- $x - 2x^2 = 0$ équivaut à $x(1-2x) = 0$
  C'est-à-dire $x = 0$ ou $1 - 2x = 0$
  C'est-à-dire $x = 0$ ou $2x = 1$
  C'est-à-dire $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$
  Donc les solutions de l'équation $x - 2x^2 = 0$ sont 0 et $\frac{1}{2}$.

e- Autres équations

Exercice d'application :

Résoudre dans R les équations $\frac{x-1}{3} = \frac{1}{2}$ *et* $\frac{x+1}{2} - x = \frac{1-x}{5}$

Rédaction :

- $\frac{x-1}{3} = \frac{1}{2}$ équivaut à $\frac{2(x-1)}{2\times3} = \frac{3\times1}{3\times2}$ c'est-à-dire $\frac{2x-2}{6} = \frac{3}{6}$

c'est-à-dire $2x - 2 = 3$ alors $2x = 3 + 2 = 5$

alors $x = \frac{5}{2}$. Donc la solution de l'équation $\frac{x-1}{3} = \frac{1}{2}$ est $\frac{5}{2}$.

$\frac{x+1}{2} - x = \frac{1-x}{5}$ équivaut à $\frac{5(x+1)}{5\times2} - \frac{10x}{10} = \frac{2(1-x)}{2\times5}$ c'est-à-dire $\frac{5x+5}{10} - \frac{10x}{10} = \frac{2-2x}{10}$

alors $5x + 5 - 10x = 2 - 2x$ alors $5x - 10x + 2x = 2 - 5$

alors $-3x = -3$ équivaut à $x = \frac{-3}{-3} = \frac{3}{3} = 1$.

Donc la solution de l'équation $\frac{x+1}{2} - x = \frac{1-x}{5}$ est 1.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmath

2- Inéquations

a- Inéquation de 1er degré

Définition

Une inéquation est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre (x par exemple), appelée inconnue de l'inéquation.
Une solution d'une inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les solutions.

Exercice d'application :

Résoudre dans R les inéquations $2x - 1 < 0$, $-x + 1 > 0$, $3x - 5 \geq 2x + 1$.

Rédaction :

- $2x - 1 < 0$ équivaut à $2x < 1$ c'est-à-dire $x < \frac{1}{2}$

Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $]-\infty, \frac{1}{2}[$

- $-x + 1 > 0$ équivaut à $-x > -1$ c'est-à-dire $x < 1$.

Les solutions sont tous les nombres strictement inferieur à 1.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $]-\infty; 1[$.

- $3x - 5 \geq 2x + 1$ équivaut à $3x - 2x \geq 1 + 5$ c'est-à-dire $x \geq 6$

Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 6.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $[6; +\infty[$.

b- Tableau de signe de $ax + b$

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.
$ax + b \geq 0$ équivaut à $ax \geq -b$ alors :

- Si $a > 0$, $ax + b \geq 0$ équivaut à $x \geq -\frac{b}{a}$.
- Si $a < 0$, $ax + b \geq 0$ équivaut à $x \leq -\frac{b}{a}$.

Résumé :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Exemples :

Tableaux de signe de $3x - 1$ et $-2x - 6$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$-2x-6$	$+$	0	$-$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths

c- Inéquation produit

Exemple 1 :

Résoudre dans R l'inéquation $(x-2)(x+1) \geq 0$

$x-2=0$ équivaut à $x=2$ et $x+1=0$ équivaut à $x=-1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-2)(x+1) \geq 0$

est $]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$

Exemple 2 :

Résoudre dans R l'inéquation $(-x+3)(x-1) > 0$

$-x+3=0$ équivaut à $x=3$ et $x-1=0$ équivaut à $x=1$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $(-x+3)(x-1) > 0$ est $]1;3[$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths

d- Inéquation quotient

Exemple : Résoudre dans R l'inéquation $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$

$x-2=0$ équivaut à $x=2$ et $x+1=0$ équivaut à $x=-1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$

$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(x+1)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$ est $]-1;2]$.

Applications et méthodes sur le site

3- Résolution de systèmes

Soient a, b, c, a', b' et c' des réels, avec $a, b,\ a'$ et b' sont non nuls.

Définition :

Une équation de la forme $ax + by = c$ est une équation de premier degré à deux inconnues. Elle représente une droite dans un repère du plan.

Le couple $(x_0; y_0)$ est une solution de l'équation si $ax_0 + by_0 = c$

Exemple : le couple $(-1; 2)$ est une solution de l'équation $x + 2y = 3$.

Remarque : l'équation $ax + by = c$ admet un nombre infini de solutions.

Définition :

Le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ s'appelle un système de deux équations à deux inconnus.

Le couple $(x_0; y_0)$ est une solution du système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, s'il est solution des deux équations du système.

Exemple : Le couple $(1; 2)$ est une solution du système $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases}$.

a- Méthode de substitution

Méthode :

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnus, on exprime une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une équation, et on remplace dans l'autre équation.

Exemple :

Résoudre dans R^2 le système $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Rédaction :

A partir de la première équation on obtient

$$x = 4 - 2y$$

en substituant x dans la deuxième équation :

$$4 - 2y + y = 3$$

$$-y = 3 - 4 = -1$$

$$y = 1$$

en reportant la valeur de y dans la première équation

$$x = 4 - 2 \times 1 = 2$$

Donc, le système $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ a pour unique solution le couple $(1; 2)$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths

b- Méthode des combinaisons linéaires

Généralement, pour résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

- On multiplie la première équation par a' est la deuxième par $-a$.
- On addition les deux équations obtenues, et on trouve y.
- On remplace dans une équation du premier système pour trouver x.

<u>Exemple :</u>

Résoudre dans R^2 le système $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ Tapez une équation ici.

<u>Rédaction :</u>

$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3(2x - 3y) = 3 \times 7 \\ -2(3x + y) = -2 \times 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x - 9y = 21 \\ -6x - 2y = -10 \end{cases}$$

On addition les deux équations obtenues

$$6x - 6x - 9y - 2y = 21 - 10$$

$$-11y = 11$$

$$y = \frac{11}{-11} = -1$$

On remplace dans une équation du premier système (la deuxième par exemple)

$$3x + (-1) = 5$$
$$3x = 5 + 1 = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$

Donc, le système $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ a pour unique solution le couple $(2; -1)$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths

c- Interprétation graphique

Pour résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ par interprétation graphique,

- On associe aux deux équations du système deux équations de deux droites.
- On trace les deux droites dans un repère du plan.
  - Si les droites sont strictement parallèles, le système n'admet aucune solution.

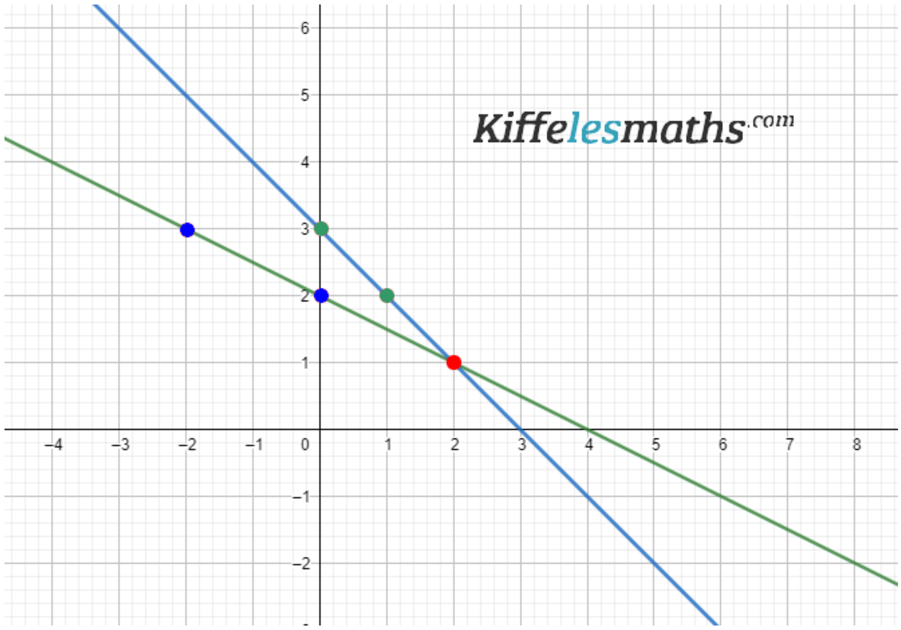
- Si les deux droites sont confondues, le système admet une infinité de solutions.
- Si les deux droites sont sécantes, le système admet une unique solution. Les coordonnées de ce point constituent alors la solution du système.

Exemple :

- Résoudre dans R^2 le système $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Rédaction :

$x + 2y = 4$		$x + y = 3$	
x	y	x	y
0	2	0	3
-2	3	1	2



- Donc, le système $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ a pour unique solution le couple $(2; 1)$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L’explication de tous le cours avec d’autres exemples et exercices en vidéo. sur le site Kiffelesmaths.com