Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1- Diviseurs et multiples

Définition:

Soit a, b deux nombres entiers relatifs.
On dit que a divise b s'il existe un entier relatif k tel que : $b = k \times a$, et on note : $a|b$.
on peut dire aussi que :
b est divisible par a.
b est un multiple de a.
a est un diviseur de b.

Exemple :

On a : $21 = 3 \times 7$ donc :

- 21 est divisible par 7.
- 7 divise 21 $(7|21)$.
- 21 est un multiple de7.
- 21 est divisible par 3.
- 3 divise 21 $(3|21)$.
- 21 est un multiple de 3.
- 3 et 7 sont des diviseurs de 21.

Propriétés :

- -1 et 1 divisent tous les nombres entiers relatifs.
- Chaque nombre entier relatif est divisible par lui-même.
- Si a est divisible par b et b est divisible par c alors a est divisible par c.
- Zéro est multiple de tous les nombres entiers relatifs.
- Chaque entier relatif est multiple de lui-même.
- La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

2- Parité

Définitions :

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- a est pair lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.
- a est impair lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k + 1$.

Exemple :

- $10 = 2 \times 5$ est un nombre pair.
- $7 = 2 \times 3 + 1$ est un nombre impair.

Propriétés :

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- Si un entier relatif a est pair, alors a^2 est pair.
- Si un entier relatif a est impair, alors a^2 est impair.
- La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.
- La somme de deux nombres de différente parité est un nombre impair.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

3- Divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 11

Soit a un entier relatif.

- a est divisible par 2 si le chiffre des unités de a est : 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemples :

12548; 33332; 999994; 236540; 23156 sont divisibles par 2.

- a est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Exemples :

111 est divisible par 3 car 1+1+1=3 et 3 est multiple de 3.
771 est divisible par 3 car 7+7+1=15 et 15 est multiple de 3.

- a est divisible par 4 si le nombre composé de ses deux derniers chiffres est un multiple de 4.

Exemples :

9120 est divisible par 4 car 20 est multiple de 4.
136532 est divisible par 4 car 32 est multiple de 4.

- a est divisible par 5 si le chiffre des unités de a est: 0 ou 5.

Exemples :

12545; 33330; 999995; 236540; 2315 sont divisibles par 5.

- a est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples :

333 est divisible par 9 car 3+3+3=9 et 9 est un multiple de 9.
774 est divisible par 9 car 7+7+4=18 et 18 est un multiple de 9.

- a est divisible par 11 si la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair est un multiple de 11

Exemples :

25894 est divisible par 11 car (2+8+4)−(5+9)=0 et 0 est un multiple de 11.
918071 est divisible par 11 car (1+0+1)- (9+8+7)=-22 et -22 est un multiple de 11.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

4- Nombres premiers

Définition :

Un entier naturel non nul est dit premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemples : $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23;$ …etc.

Propriété :

Un entier naturel a premier, si et seulement s'il n'est pas divisible par tous les nombres premiers k, tel que $1 < k < \sqrt{a}$

Exercice d'application:

Est-ce que 113 est un nombre premier.

Rédaction :

on a $\sqrt{113} \approx 10.63$ et les nombres premiers k, tel que $1 < k < \sqrt{a}$ sont 2; 3; 5 et 7.

Et puisque 113 n'est pas divisible par 2; 3; 5 et 7 donc 113 est un nombre premier.

Définition :

On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Exemple :

15 et 14 sont premiers entre eux.

Définition :

On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

$\frac{15}{14}$ est une fraction irréductible.

Exercice d'application :

Rendre irréductible la fraction $\frac{180}{1575}$.

Rédaction :

Pour rendre la fraction $\frac{180}{315}$ irréductible, il faut décomposer 180 et 315 en produits de facteurs premiers.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Donc $\frac{180}{315} = \frac{2\times2\times3\times3\times5}{3\times3\times5\times7} = \frac{4}{7}$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com