# Apprendre à démlontrer

## 1- Propositions mathématiques.

### a- Proposition :

Principe :

Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux.

Exemples :

- « Un entier naturel est toujours positif » est une proposition vraie.
- « Tout carré de réel est un réel positif » est une proposition vraie.
- « 7 est un nombre paire » est une proposition fausse.

### b- Définitions :

Définition 1 :

La négation d'une proposition $P$ est une proposition notée $\bar{P}$ qui est vraie si $P$ est fausse et qui est fausse si $P$ est vraie.

Notation :

- La négation d'une proposition $P$ est noté aussi $nonP$ ou $\rceil P$.

Table de vérité de $\bar{P}$.

| $P$ | $\bar{P}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Exemple :

- Soit $x \in \mathbb{R}$ , la négation de la proposition « $x > 0$ » est « $x \leq 0$ ».

Remarque :

Une proposition $P$ peut dépendre d'une variable ($2x^2 + 1 \geq 0$), on peut alors la noté $P(x)$.

Définition 2 :

Soient $P$ et $Q$ deux propositions.

On dit que $P$ implique $Q$ dans le cas où, si $P$ est vraie alors $Q$ est aussi vraie.

Notation :

- $P$ implique $Q$ est notée $P \Longrightarrow Q$.

Table de vérité de $P \Longrightarrow Q$.

| $P$ | $Q$ | $P \Longrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | **F** |
| F | V | V |
| F | F | V |

Exemples :

- « $(x = 2) \Longrightarrow (x^2 = 4)$ » est une proposition vraie.
- « $(1 < 2) \Longrightarrow (5 > 7)$ » est une proposition fausse.

Définition 3 :

Soient $P$ et $Q$ deux propositions.

L'implication $Q \Longrightarrow P$ est la réciproque de $P \Longrightarrow Q$.

Notation :

La proposition «$P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$ » est noté $P \Leftrightarrow Q$.

Table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$.

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | **F** |
| F | V | **F** |
| F | F | V |

Exemple :

« $x^2 = 0$ » $\Leftrightarrow$ « $x = 0$ »

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

## 2- Connecteurs logiques et qualificateurs

### a- Principe :

A partir de deux propositions $P$ et $Q$, on peut définir :

- La proposition « $P$ *et* $Q$ », notée $P \wedge Q$ : cette proposition est vraie si, et seulement si, les propositions $P$ et $Q$ sont toutes les deux vraies.
- La proposition « $P$ *ou* $Q$ », notée $P \vee Q$ : cette proposition est vraie si, et seulement si, au moins une des propositions $P$ et $Q$ est vraie.

Table de vérité

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ | $P$ ou $Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | F |

Exemple :

- La proposition [« $x^2 = 1$ » $\Leftrightarrow$ « $x = 1$ *ou* $x = -1$ »] est vraie.
- La proposition [« $x^2 \neq 1$ » $\Leftrightarrow$ « $x = 1$ *et* $x = -1$ »] est vraie.

Remarques :

$$\overline{(P\ ou\ Q)} \Leftrightarrow \overline{P} et\ \overline{Q} \quad \text{et} \quad \overline{(P\ et\ Q)} \Leftrightarrow \overline{P} ou\ \overline{Q}$$

**b- Définitions.**

Lorsqu'une proposition dépend d'un paramètre, on peut utiliser deux types de quantificateurs :

- Le quantificateur universel « Pour tout » noté "$\forall$".
- Le quantificateur existentiel « il existe » noté "$\exists$".

Exemple :

- $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$ $\Leftrightarrow$ «pour tout réel $x$ on a $x^2 \geq 0$».
- $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x = 0)$ $\Leftrightarrow$ «il existe au moins un réel $x$ tel que $x^2 - x = 0$».

Remarque :

- $\exists! x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ « il existe un élément unique $x$ de $\mathbb{R}$ ».

Exercice d'application :

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

a) $f$ est une fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
b) L'équation $f(x) = x$ admit au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
c) L'équation $\sqrt{x} = x$ a une seule solution dans $\mathbb{R}^+$.

Correction :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
b) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
c) $\exists! x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} = x$.

Remarques :

$$\overline{(\exists x \in \mathbb{R},\ P)} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \overline{P}) \quad \text{et} \quad \overline{(\forall x \in \mathbb{R},\ P)} \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, \overline{P})$$

Exemples :

- La négation de $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ est $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0)$
- La négation de $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < x)$ est $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x)$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

## 3- Les différents types de raisonnement

### a- Raisonnement par déduction.

Principe :

Soient $P$ et $Q$ deux propositions.

Quand $P$ est vraie, et $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut affirmer que $Q$ est vraie.

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Exemple d'application :

Montrer que $\forall x \in [2; +\infty[, x^2 - 3 \geq 1$.

Démonstration :

$\forall x \in [2; +\infty[$ on a $x \geq 2$

alors $x^2 \geq 2^2$ soit $x^2 \geq 4$

alors $x^2 - 3 \geq 4 - 3$

donc $x^2 - 3 \geq 1$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

**b- Utilisation d'un contre-exemple.**

Principe :

Pour rejeter une affirmation, il suffit de trouver un cas particulier qui vient la contredire.

Ce cas particulier est appelé contre-exemple.

Logiquement on utilise le contre-exemple pour prouvez qu'une affirmation est fausse.

Exemple d'application :

Tout entier naturel non premier est paire.

Rédaction :

9 est un entier naturel divisible par 3 donc, il n'est pas premier.

Or 9 n'est pas paire.

Donc la proposition « Tout entier naturel non premier est paire » est fausse.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

**c- Raisonnement par l'absurde.**

Principe :

Quand $\bar{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et $Q$ est une proposition fausse, on peut affirmer que $P$ est une proposition vraie.

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que $\bar{P}$ est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que $P$ est vraie. (puisque $Q$ est fausse, l'implication $\bar{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\bar{P}$ est fausse ou encore si $P$ est vraie)

| $P$ | $\bar{P}$ | $Q$ | $\bar{P} \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|---|
| F | V | V | V |
| F | V | F | F |
| V | F | V | V |
| V | F | F | V |

Exemple d'application :

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Rédaction :

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Il existe alors deux entiers naturels non nuls $a$ et $b$ premiers entre eux ($a$ et $b$ n'ont aucun facteur commun), tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ou encore $a^2 = 2b^2$, ce qui signifie que $a$ est nécessairement paire, c'est à dire $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2p$.

Alors $2b^2 = (2p)^2 = 4p^2$ alors $b^2 = 2p^2$ donc $b$ est divisible par $2$.

Ce qui contredit l'hypothèse que $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

Puisque l'hypothèse « $\sqrt{2}$ est rationnel » conduit à une contradiction, donc c'est le contraire qui est vrai, à savoir « $\sqrt{2}$ est irrationnel ».

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

d- **Raisonnement par contraposé.**

Principe :

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est une proposition vraie.

Théorème :

Selon les tableaux de vérité de $P \Rightarrow Q$ et $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ on a $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

| $P$ | $Q$ | $P \Longrightarrow Q$ | $\bar{Q}$ | $\bar{P}$ | $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V |

Exemple d'application :

Montrer que si $n^2$ est impaire alors $n$ est impaire.

Rédaction :

On pose : ($P$: $n^2$ est impaire) et ($Q$: $n$ est impaire).

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ il suffit de montrer que $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Et on a $\bar{P}$: $n^2$ est paire et $\bar{Q}$ : $n$ est paire.

Si $n$ est paire alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$

Alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ alors $n^2$ est paire.

Donc $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ et par contraposé on en déduit que $P \Rightarrow Q$

C'est-à-dire, si $n^2$ est impaire alors $n$ est impaire.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

**e- Raisonnement par disjonction de cas.**

Principe :

Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur d'une variable $x$, il est parfois utile de faire une disjonction de cas.

Exemple d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + |x-1| + x + 1 = 0$

Rédaction :

- Si $x \geq 1$ on a $x - 1 \geq 0$ c'est à dire $|x-1| = x - 1$

donc $x^2 - |x-1| + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 + x + 1 = 0$

alors $x^2 + 2 = 0$ ce qui est impossible.

- Si $x < 1$ on a $x - 1 < 0$ c'est à dire $|x-1| = -x + 1$

donc $x^2 - |x-1| + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 + x + 1 = 0$

alors $x^2 + 2x = 0$ c'est-à-dire $x(x+2) = 0$

c'est-à-dire $x = 0$ ou c'est-à-dire $x = -2$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{-2; 0\}$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

## 4- Raisonnement par récurrence.

Principe :

Le raisonnement par récurrence ne peut s'utiliser que lorsqu'on cherche à démontrer qu'une proposition est vraie pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à un entier naturel $n_0$.

Théorème :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P_n$ définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Si les deux propositions suivantes sont vraies :

- $P_{n_0}$ est vraie. (c'est-à-dire la proposition est vraie pour $n = n_0$).
- Pour tout entier naturel $k \geq n_0$, «$P_k$ est vraie» implique «$P_{k+1}$ est vraie».

Alors $\forall n \geq n_0$, $P_n$ est vraie.

Exemple d'application :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 4^n + 2$ est divisible par 3.

Rédaction :

- Pour $n_0 = 0$ on a $A_0 = 4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$

Donc $A_0$ est divisible par 3. (La proposition est vraie pour $n_0 = 0$)

- Supposons que $A_n$ est divisible par 3, c'est-à-dire $A_n = 3k\,; k \in \mathbb{N}$.
- Montrons que $A_{n+1}$ est divisible par 9.

On a $A_{n+1} = 4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2 = 3 \times 4^n + 4^n + 2$

$A_{n+1} = 3 \times 4^n + A_n = 3 \times 4^n + 3k$

$A_{n+1} = 3(4^n + k) = 3k'$ avec $k' = 4^n + k$

Donc $A_{n+1}$ est un multiple de 3. (c'est-à-dire la proposition est vraie pour n+1)

Finalement, par le principe de récurrence en, on déduit que $A_n$ est divisible par 3.