Généralités sur les suites

1- Dentition et représentation graphique :

a- Définition et notation :

Définition 1 :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$,
Une suite numérique u est une fonction définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'image de n est notée $u(n)$ ou encore u.
La suite est notée $(u_n)_{n\geq n_0}$ ou, plus simplement (u_n).
u_n s'appelle terme général de la suite (u_n).

Attention : (u_n) est une suite mais u_n est un nombre.

Définition 2 :

Une suite est définie explicitement si le terme général de la suite est exprimé en fonction de n, c'est-à-dire il existe une fonction f telle que $u_n = f(n)$.
Alors on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de n.

Exemples :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites définies par : $u_n = 2n - 1$ et $v_n = 2^n$, on a :

- $u_0 = 2 \times 0 - 1 = -1$, $u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$, $u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$, …
- $v_0 = 2^0 = 1$, $v_1 = 2^1 = 2$, $v_5 = 2^5 = 32$, ….

Définition 3 :

Une suite est définie par récurrence lorsque chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un (ou plusieurs) des termes précédents.

Note : Dans une suite définie par une relation de récurrence, généralement, on donne le premier terme.

Exemples :

Soit (a_n) une suite telles que $a_0 = \frac{1}{2}$ et $a_{n+1} = 2a_n + 3$ pour tout $n \geq 0$.
La suite (a_n) est une suite définie par récurrence.
Pour calculer a_2, il faut calculer a_1.
$a_1 = a_{0+1} = 2a_0 + 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 4$ et $a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \times 4 + 3 = 11$.

Notation : La suite (a_n) est notée aussi : $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = 2a_n + 3\,, \quad n \geq 0 \end{cases}$

Voir les exercices d'application sur le site Kiffelesmaths.com

b- Représentation graphique :

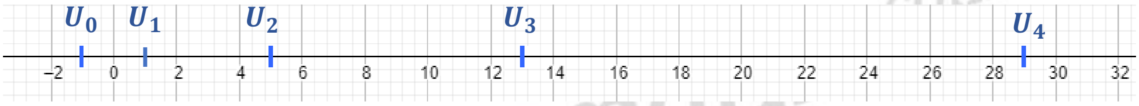
Une suite (u_n) peut être représentée soit en plaçant les réels u_0 , u_1 , u_2 , … sur une droite graduée, soit en plaçant les points de coordonnées $(n; u_n)$, dans un repère.

Exemple :

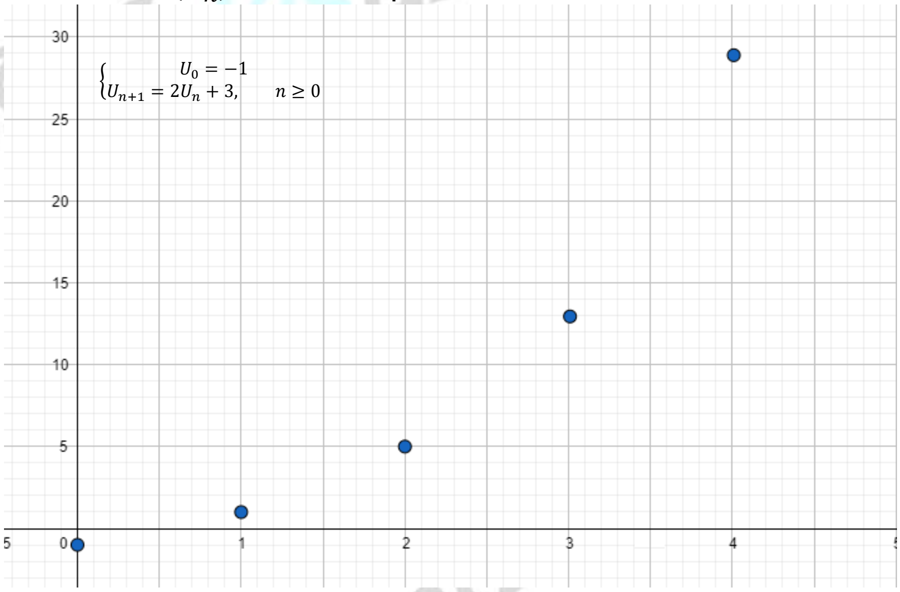
Soit (U_n) une suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 3, \; n \geq 0 \end{cases}$

On a $U_1 = 2U_0 + 3 = 1,\; U_2 = 5\,, U_3 = 13, U_4 = 29, \ldots$

La représentation de (U_n) sur une droite :



La représentation de (U_n) sur un repère :



c- Sens de variation :

Définitions :

Soit (u_n) une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$,

La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 signifie que pour $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang n_0 signifie que pour $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 signifie que pour $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang n_0 signifie que pour $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.

Une suite est dite monotone à partir du rang n_0 lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang n_0.

Exemples :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que $u_n = \frac{1}{2}n - 4$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$.

Pour tout $n \geq 0,\; u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}(n+1) - 4\right) - \left(\frac{1}{2}n - 4\right) = \frac{1}{2} > 0$

donc (u_n) est strictement croissante.

pour tout $n \geq 0,\; v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{(n+1)+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

donc (v_n) est strictement décroissante.

Remarque :

Si $u_n > 0$ pour tous $n \geq n_0$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ signifier que $U_{n+1} \geq U_n$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ signifier que $U_{n+1} \leq U_n$.

Propriétés :

Soit f une fonction définie sur R^+ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$,

- Si f est croissante sur l'intervalle $[n_0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $[n_0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.

Exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = -\frac{1}{2}n$.

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(n) = -\frac{1}{2}n$.

On a f est une fonction affine de coefficient $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, On en déduit que (u_n) est décroissante pour tout $n \geq 0$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

2- Suites arithmétiques :

a- Généralités :

Définition :

Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

Exemple :

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$
est une suite arithmétique de raison $r = 3$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

Propriétés :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.
- Pour tous entiers naturels p et n, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exemple d'application :

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 2$.
1- Calculer u_1, u_5.
2- Exprimer u_{17} en fonction de u_5.

Correction :

1- $u_1 = u_0 + 1 \times r = 2 + 1 \times 4 = 6$;
$u_5 = u_0 + 5 \times r = 2 + 5 \times 4 = 22$;

2- $u_{17} = u_5 + (17 - 5) \times r = u_5 + (12) \times 4 = u_5 + 48.$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Somme de termes :

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, on a :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

Plus généralement pour tous entiers naturels p et n tel que $p < n$ on a :

$$S' = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}$$

Exemple d'application :

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.

1- Calculer u_5 et exprimer u_n en fonction de n.

2- Calculer les sommes : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$ et $S_n = u_5 + u_1 + \cdots + u_n$.

Correction :

1-

$u_5 = u_0 + 5 \times r = -2 + 5 \times 3 = 13.$

$u_n = u_0 + n \times r = -2 + 3n = 3n - 2.$

2-

$$\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \cdots + u_5 = \frac{(u_0 + u_5)(5+1)}{2} = \frac{(-2+13)(6)}{2} = 33.$$

$$\mathrm{S_n} = \frac{(u_5 + u_n)(n - 5 + 1)}{2} = \frac{(13 + 3n - 2)(n-4)}{2} = \frac{(11 + 3n)(n-4)}{2}$$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Sens de variation :

Propriété :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si r =0 alors la suite (u_n) est constante.

Exemple d'application :

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n + 7$.

1- Montrer que (u_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

2- Déduire la monotonie de (u_n).

Correction :

1- On a $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 7 - (3n+7) = 3$

Alors $u_{n+1} = u_n + 3$
Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

2- (u_n) est une suite arithmétique de raison $3 > 0$
Donc (u_n) est strictement croissante.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

3- Suites Géométrique :

a- Généralités :

Définition :
Une suite (v_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q non nul tel que pour tout entier n, on a : $v_{n+1} = q \times v_n$.
Le nombre q est appelé la raison de la suite (v_n).

Exemple :
La suite (v_n) définie pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$
est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

Propriétés :
(v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.

- Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = \mathrm{q}^{\mathrm{n}} \times v_0$.
- Pour tous entiers naturels p et n tel que $p < n$, on a : $v_n = q^{\mathrm{n-p}} \times v_p$.

Exemple d'application :
(v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 1$.
3- Calculer v_1, v_6.
4- Exprimer v_{14} en fonction de v_6.

Correction :

1- $v_1 = q \times v_0 = 2 \times 1 = 2.$;
$v_6 = q^6 \times v_0 = 2^6 \times 1 = 64$;

2- $v_{14} = q^{14-6} \times v_6 = 2^8 \times 64 = 256 \times 64 = 16384.$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Somme de termes :

Propriété :
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \times v_0$$

Plus généralement pour tous entiers naturels p et n tel que $p < n$ on a :

$$S' = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \times v_p$$

Exemple d'application :

(a_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $a_0 = 2$.
Calculer les sommes : $S = a_0 + a_1 + \dots + a_7$.

Correction :

$$S = a_0 + a_1 + \dots + a_7 = \frac{1 - q^{7+1}}{1 - q} \times a_0 = \frac{1 - 3^8}{1 - 3} \times 2 = \frac{1 - 6561}{-2} \times 2 = 6560.$$

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Sens de variation :

Propriété :

(v_n) est une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$ alors la suite (v_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est décroissante.
- Si q =1 alors la suite (v_n) est constante.
- Si $q < 0$ la suite (v_n) n'est pas monotone.

Exemple d'application :

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3^n$.
1- Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
2- Déduire la monotonie de (v_n).

Correction :

1- On a $v_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3v_n$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
2- (v_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$
Donc (v_n) est strictement croissante.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com