Vecteurs, droites et plans de l'espace

1- Vecteurs de l'espace :

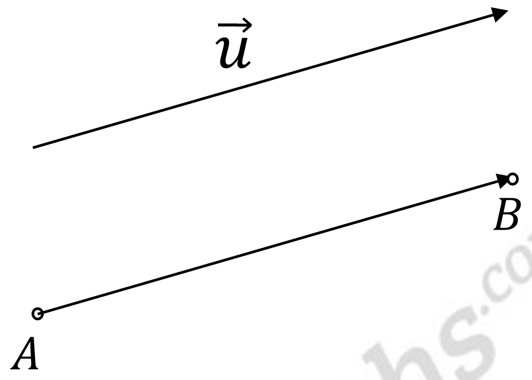
a- Translation :

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

B est l'image de A par la translation du vecteur $\vec{u}$ signifie que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Remarques :



- On étend à l'espace la notion de vecteur étudiée en géométrie plane.
- La translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ associe à tout point M l'unique point M' tel que [AM] et [A'M'] ont même milieu.
- Si A' et B' les images respectives de A et B par une translation t du vecteur $\vec{u}$ dans l'espace alors on a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Conséquence :

- La translation conserve les distances c'est-à-dire si A' et B' sont les images respectives de A et B par une translation t du vecteur $\vec{u}$ dans l'espace alors AB=A'B'.

Voir les exercices d'application sur le site Kiffelesmaths.com

b- Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires..

Définition 1:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarques :

- $\vec{u} = k\vec{v}$ Signifie que $\vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Des vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction.

Propriétés :

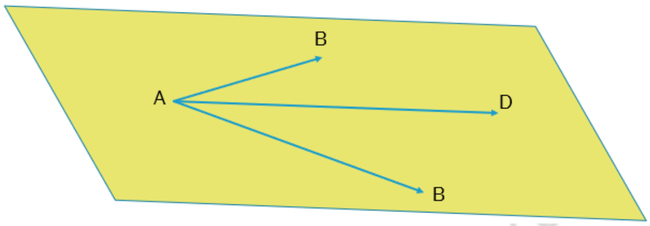
Soient A, B et C trois points de l'espace deux à deux distincts.

Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = k\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Définition 2:

On considère quatre points distincts de l'espace A, B, C et D et soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs définis par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque les points A, B, C et D appartiennent à un même plan. (c'est-à-dire A, B, C et D sont coplanaires)



Remarque :

- Le vecteur nul est toujours coplanaire à deux autres vecteurs quelconques.

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux nombres réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ et on dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Vecteurs linéairement indépendants et base de l'espace.

Définition 1 :
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et α, β et γ trois réels.
On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants lorsqu'ils ne sont pas coplanaires, autrement dit lorsque $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Remarque :
Deux vecteurs non colinéaires sont linéairement indépendants.

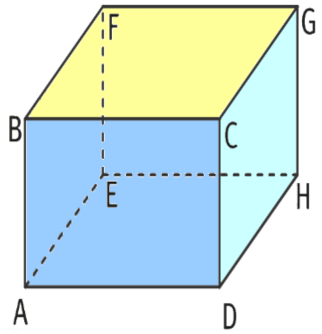
Définition 2 :
Trois vecteurs linéairement indépendants forment une base de l'espace.

Notation :
La base formée par trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ linéairement indépendants est noté $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Propriété :

Soit $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ une base de l'espace.
Pour chaque vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un unique triplet de réels (x,y,z) tel que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$. Et on note $\vec{u}(x;y;z)$ ou bien $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Exercice d'application :
Soit ABCDEFGH un cube.



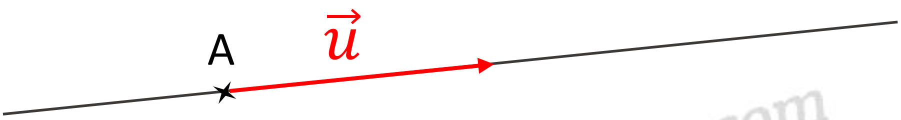
i. Quel est l'image de A par la translation du vecteur $\overrightarrow{DH}$? justifier.
ii. Est-ce que les vecteurs $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires ? justifier.
iii. Déterminer le triplet (x,y,z) tel que $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AE}+z\overrightarrow{AB}$.

Correction :
i. AEHD est un carré alors $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DH}$, donc l'image de A par la translation du vecteur $\overrightarrow{DH}$ est E.
ii. $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.
iii. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$
iv. donc $(1{,}1{,}1)$ est le triplet associer au vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB})$ de l'espace.

2- Droites et plans de l'espace.
a- Droites de l'espace.

Définition 1 :
Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ avec $k\in\mathbb{R}$, est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

$(A,\vec{u})$ est un repère de cette droite.

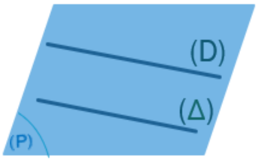
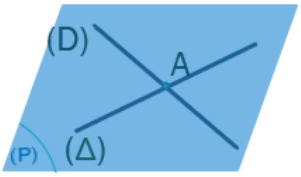
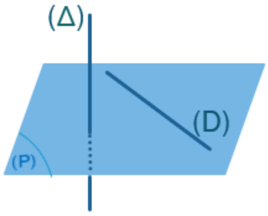


$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite.

Définition 2 :

On dit que deux droites sont coplanaires, si elles appartiennent à un même plan.

Deux droites coplanaires peuvent être sécantes (avoir un point d'intersection) ou parallèles (strictement parallèles ou confondues).

Droites coplanaires			Droites non coplanaires
(D) et (Δ) sont parallèles.		(D) et (Δ) sont sécantes.	(il n'existe aucun plan qui contient les deux droites en même temps)
 $(D) \cap (\Delta) = \emptyset$	 (D) et (Δ) ont confondues	 $(D) \cap (\Delta) = \{A\}$	 $(\Delta) \cap (L) = \emptyset$

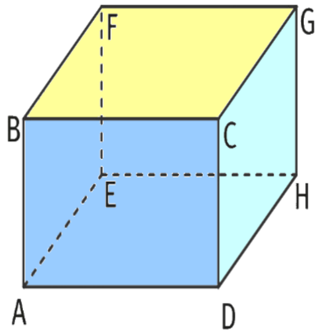
Propriété :

Toutes les propriétés de la géométrie plane restent valables dans tout plan de l'espace, c'est-à-dire « lorsque les droites sont coplanaires, on retrouve les résultats obtenus en géométrie plane ».

Exemples

Soit ABCDEFGH un cube.

- (AC) et (BD) sont sécantes donc sont coplanaires.
- (AB) et (GH) sont parallèles donc sont coplanaires.
- (AB) et (EH) ne sont pas sécantes ni parallèles donc sont non coplanaires.
- (AG) et (AH) sont sécantes donc sont coplanaires.



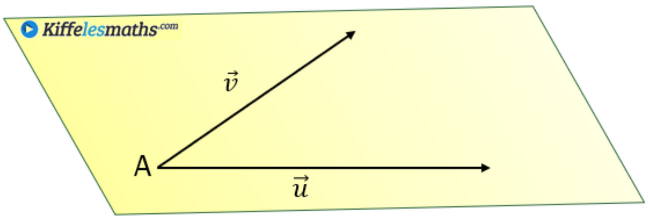
Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Plans de l'espace.

Définition 1 :

Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ (avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}$) est un plan de l'espace dirigé par la base $(\vec{u};\vec{v})$.

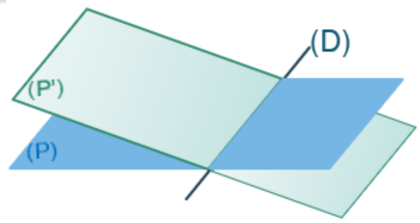
$(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.



La direction du plan est $(\vec{u};\vec{v})$.

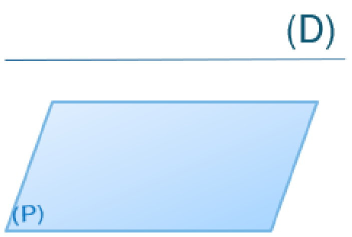
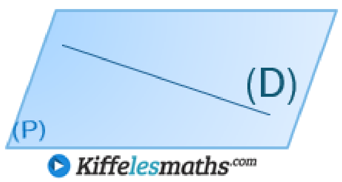
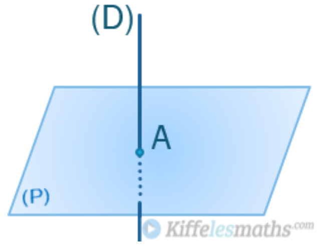
Position relative de deux plans :

Soient (P) et (P') deux plans dans l'espace, on a trois cas possibles :

(P) et (P') sont parallèles.		(P) et (P') sont sécantes.
$(P) \cap (P') = \emptyset$	$(P) = (P')$	$(P) \cap (P') = (D)$
		
Strictement parallèles	Confondus	Se coupent en une droite

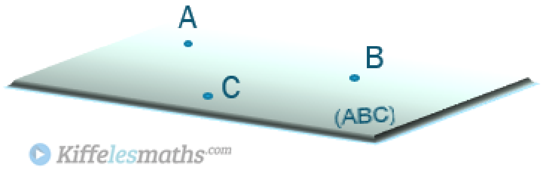
Position relative d'un plan et une droite :

Soient (P) un plan et (D) une droite dans l'espace, on a trois cas possibles :

(D) et (P) sont parallèles.		(P) et (P') sont sécantes.
$(D) \cap (P) = \emptyset$	$(D) \subset (P)$	$(D) \cap (P) = \{A\}$
		
Strictement parallèles	(D) inclus dans (P)	(D) coupe (P) en un point.

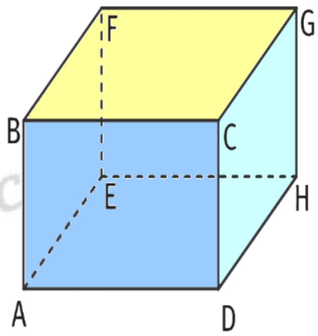
Remarque :

Trois points non alignés définissent un plan unique.



Exemples :

Soit ABCDEFGH un cube.



- La droite (BC) coupe le plan (DCH) en C.
- La droite (AH) est incluse dans le plan (ADH).
- La droite (AD) est parallèle au plan (BCG).
- Les deux plans (BCG) et (ADH) sont strictement parallèles.
- Les deux plans (ABC) et (ADH) sont sécantes en (AD).
- Les deux plans (ABC) et (ADC) sont confondus. (en fait c'est le même plan)

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Parallélisme dans l'espace.

Théorème 1 :

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si, et seulement si, il existe une droite (L) du plan (P) parallèle à (D).

C'est-à-dire : Si $\begin{cases}(D)\ //\ (L) \\ (\mathrm{L}) \subset (P)\end{cases}$ alors $(D)\ //\ (\mathrm{P})$

Théorème 2 :

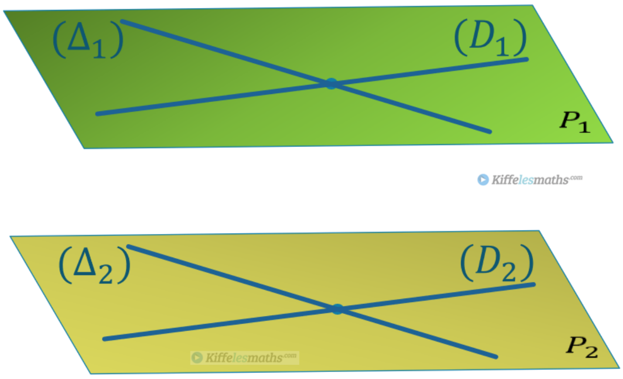
Un plan (P_1) est parallèle à un plan (P_2) si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de (P_1) parallèles à deux droites sécantes de (P_2).

Exemple :

Soient (D_1) et (Δ_1) deux droites sécantes dans le plan (P_1);

et (D_2) et (Δ_2) deux droites sécantes dans le plan (P_2).

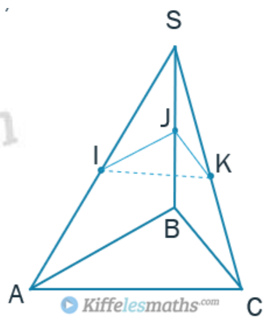
Si $\begin{cases}(D_1)\ //\ (D_2) \\ (\Delta_1)\ //\ (\Delta_2)\end{cases}$ alors $(P_1)\ //\ (P_2)$



Exercice d'application :

Soit SABC une pyramide I, J et K les milieux de [SA], [SB] et [SC] successivement.

Montrer que (IJK)//(ABC).



Correction :

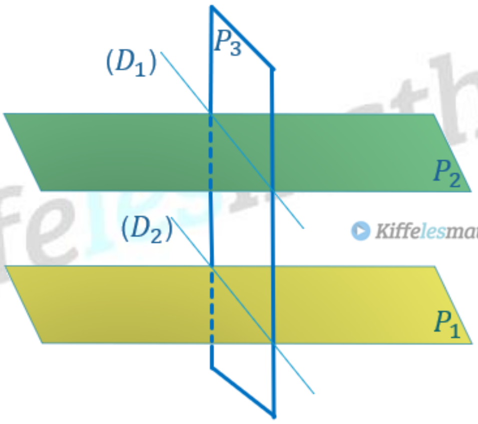
On a (IJ) et (JK) deux droites sécantes dans le plan (IJK)

et (AB) et (BC) deux droites sécantes dans le plan (ABC)

et puisque $\begin{cases}(IJ)\ //\ (AB) \\ (JK)\ //\ (BC)\end{cases}$ donc $(IJK)\ //\ (ABC)$

Théorème 3 :

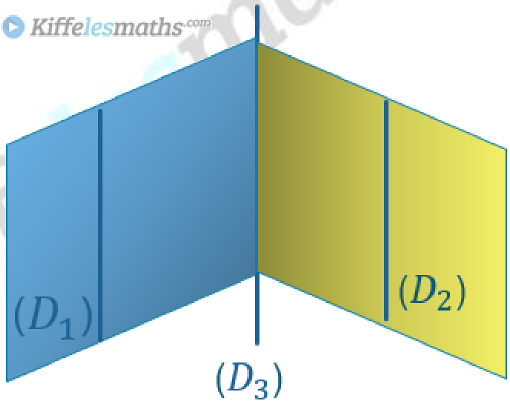
Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un, coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



$\begin{cases} (P_1) \parallel (P_2) \\ (P_3) \text{ coupe } (P_1) \text{ en } (D_1) \\ (P_3) \text{ coupe } (P_2) \text{ en } (D_2) \end{cases}$ donc $(D_1) \parallel (D_2)$.

Théorème 4 (Théorème du toit) (admis) :

Si deux plans sécants contiennent respectivement deux droites strictement parallèles, alors leur intersection est une droite parallèle aux premières.



Dans cet exemple si $(D_1)//(D_2)$ alors (D_3) est parallèle avec (D_1) et (D_2)

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

3- Repère de l'espace.

a- Coordonnées d'un point de l'espace.

Définition 1 :

Un repère de l'espace est défini par la donnée d'un point O de l'espace et d'une base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace.

Notation :

Le repère défini par le point O et la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est noté $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Définition 2 :

Soit $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ un repère.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de $\mathbb{R}^3$, tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$.

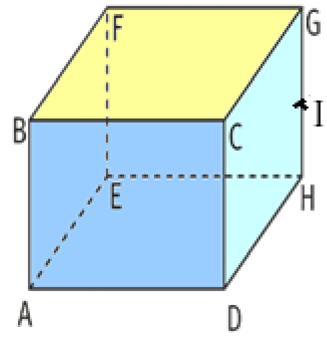
x,y et z sont les coordonnées de M dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

x est appelé abscisse de M, y l'ordonnée et z la cote.

Exemple :

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[GH]$.

Déterminons les coordonnées de I dans le repère $(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB})$.



On a $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HI}$ (relation de Chasles)

alors $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$ ($\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}$ car ADHE est un carré)

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ ($\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{DC}$ car DCGH est un carré)

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ car ABCD est un carré)

Donc les coordonnées de I dans le repère $(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB})$ sont $\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

C'est-à-dire $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

b- Opérations sur les coordonnées

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Propriétés :

Soit A, B et I trois points de l'espace tels que $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ et I le milieu de $[AB]$, on a :

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$ est on écrit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du point I sont $\begin{pmatrix} \frac{x_B+x_A}{2} \\ \frac{y_B+y_A}{2} \\ \frac{z_B+z_A}{2} \end{pmatrix}$ est on écrit I $\begin{pmatrix} \frac{x_B+x_A}{2} \\ \frac{y_B+y_A}{2} \\ \frac{z_B+z_A}{2} \end{pmatrix}$.

Exemple :

Si $E(2;1;-3)$ et $F(0;1;2)$ alors $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-1 \\ -3-2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Si H est le milieu de $[EF]$ alors H $\begin{pmatrix} \frac{2+0}{2} \\ \frac{1+1}{2} \\ \frac{-3+2}{2} \end{pmatrix}$ soit $H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Propriétés :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace et k un réel.

- Les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}\alpha+\alpha'\\\beta+\beta'\\\gamma+\gamma'\end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}k\alpha\\k\beta\\k\gamma\end{pmatrix}$.

Exemple :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$,

- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2+1\\1+0\\-3+4\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.
- $3\vec{u}\begin{pmatrix}3\times 2\\3\times 1\\3\times(-3)\end{pmatrix}$ soit $3\vec{u}\begin{pmatrix}6\\3\\-9\end{pmatrix}$.

Applications et méthodes sur le site Kiffelesmaths.com

c- Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Propriété :

Soit (D) une droite telles que $A(x_A;y_A;z_A)\in(D)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D).

$M(x;y;z)\in(D)$ signifie qu'il existe un réel t tel que $\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\\z=\gamma t+z_A\end{cases}$

Le système $\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\\z=\gamma t+z_A\end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

Remarque :

Il existe une infinité de représentations paramétriques d'une droite.

Application :

Soit $E(2;1;-3)$ et $F(0;1;2)$,

Déterminer la représentation paramétrique de la droite (EF).

Correction :

$E(2;1;-3) \in (EF)$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D)

Donc $\begin{cases}x=-2t+2\\y=1\\z=5t+5\end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (EF).

L'explication de tous le cours avec d'autres exemples et exercices en vidéo.
sur le site Kiffelesmaths.com